HAL open science

Statistique bayésienne appliquée en sciences humaines et sociales.

Jean-Michel Galharret

To cite this version:

Jean-Michel Galharret. Statistique bayésienne appliquée en sciences humaines et sociales.. Statistiques [math.ST]. Université de Nantes Faculté des sciences et des techniques, 2019. Français. NNT : . tel-02431662

HAL Id: tel-02431662

https://nantes-universite.hal.science/tel-02431662v1

Submitted on 8 Jan 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de

L'UNIVERSITÉ DE NANTES
Comue Université Bretagne Loire

École Doctorale N° 601
Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques appliquées et applications des mathématiques*

Par

Jean-Michel GALHARRET

Statistique bayésienne appliquée en sciences humaines et sociales

Thèse présentée et soutenue à Nantes, le 12 Décembre 2019
Unité de recherche : Laboratoire de Mathématiques Jean Leray, UMR CNRS 6629.

Composition du Jury :

Président :	Pierre Pudlo	Professeur, Aix Marseille Université
Rapporteurs :	Ron Kenett	Professeur, Samuel Neaman Institute
	Éric Parent	Ingénieur Général des Ponts des Eaux et des Forêts, Agroparistech
Examinateurs :	Antoine Chambaz	Professeur, Université Paris Descartes
	Bertrand Michel	Professeur, École centrale Nantes
Dir. de thèse :	Anne Philippe	Professeur, Université de Nantes
Co-enc. de thèse :	Paul Rochet	Maître de conférences, Université de Nantes

Acknowledgement

Je tiens tout d'abord à très sincèrement remercier Anne sans laquelle ce projet n'aurait pas vu le jour. Elle m'a consacré beaucoup de son temps et nous avons de ce fait pu avancer rapidement dans la réalisation de mon projet. Je tiens également à remercier Paul qui a accepté de co-encadrer mon travail, ses remarques et son aide m'ont également été très précieuses. Merci également à Ron et Éric d'avoir accepté de rapporter mon travail et de m'avoir donné de précieux conseils qui m'ont permis de l'améliorer. Merci enfin aux membres du jury pour les nombreuses questions qu'ils m'ont posées et qui m'ont permis d'expliciter les choix que j'ai fait dans mon travail.

Je tiens également à remercier mes collègues de la faculté de Psychologie qui depuis mon arrivée m'ont fait confiance et m'ont permis de découvrir la recherche en psychologie. La psychologie est une discipline qui de décline en plusieurs domaines tels que par exemple la psychologie clinique, cognitive, sociale, du développement, de la santé, du sport, ... La statistique et la psychologie sont intimement liées depuis le début du XX-ième avec la psychométrie qui une des branches de la psychologie expérimentale dédiée à la mesure et aux tests. De nombreux psychologues se sont intéressés à la statistique, on peut par exemple citer Charles Spearman, psychologue, qui se consacra à l'analyse factorielle et à la corrélation. Je voudrai plus particulièrement remercier Philippe qui est l'un des premiers collègues avec lequel j'ai pu collaborer. J'ai pu contribuer aux traitements statistiques des données du rapport terminal remis à la DEEP [1] le 28/02/2017. Je le remercie de m'avoir autorisé à utiliser les données recueillies dans le cadre de ma thèse. Je remercie également Alison, Christine, André qui m'ont également permis d'utiliser les données de leur recherche dans ce manuscrit.

Enfin, un grand merci à toute ma compagne Nolwenn et à mes enfants (Emma, Timéo, Sarah et Liam) d'avoir supporté ces deux années difficiles, je leur dédie ce travail.

1. Direction de l'Évaluation de la Prospective et de la Performance, ministère de l'Éducation nationale

Table of Contents

1 Introduction **9**
1.1 L'analyse de médiation 11
1.1.1 L'effet causal : approche contrefactuelle 12
1.1.2 Le modèle de médiation 21
1.1.3 L'effet naturel direct et indirect 24
1.1.4 Identification des effets naturels directs et indirects 26
1.2 Contribution à l'analyse de médiation 28
1.2.1 Le test non paramétrique de l'effet direct 28
1.2.2 Construction de différentes lois a priori informatives 29
1.3 Applications en psychologie 31
1.3.1 Les modèles et les outils de mesure en psychologie 31
1.3.2 Les modèles de médiation en psychologie 32
1.3.3 Contribution 33
1.4 Les modélisations pour la datation en archéologie : 33
1.4.1 La datation par luminescence 33
1.4.2 Le problème des valeurs aberrantes 34
1.4.3 Contribution à la modélisation en archéologie 35

2 Non-parametric Mediation Analysis for direct effect with binary outcomes **37**
2.1 Introduction 38
2.2 Strong absence of direct effect 40
2.3 The non-parametric test procedure 43
2.4 Numerical applications 45
2.4.1 Students' Self-Efficacy Feeling 45
2.4.2 Simulated data 49

3 Priors Comparison in Bayesian mediation framework with binary outcome 55
3.1 Introduction . . . 56
3.2 Brief introduction of Causal Mediation analysis . . . 58
3.3 Bayesian inference of effects . . . 60
3.4 Prior distribution choice . . . 63
3.5 Numerical results : . . . 69
3.6 Testing the absence of effect : . . . 73
3.7 Application to schoolchildren's Well-Being : . . . 75
3.8 Discussion and conclusion . . . 81
3.9 Appendix . . . 81
3.9.1 Proof of the Proposition 3.2.2 . . . 81
3.9.2 Proof of the proposition 3.6.1 . . . 82

4 Médiation modérée dans un modèle à plusieurs variables d'exposition 83
4.1 Contexte et objectif . . . 84
4.1.1 Contexte de l'étude . . . 84
4.1.2 Objectifs de l'étude . . . 85
4.2 Modélisations statistiques . . . 87
4.2.1 Modèle de médiation à plusieurs variables d'expositions . . . 87
4.2.2 L'analyse de médiation modérée : . . . 90
4.2.3 Test de modération construit sur le facteur de Bayes . . . 94
4.2.4 Modélisation associée à l'hypothèse 2 . . . 94
4.3 Résultats et discussion . . . 95
4.3.1 Hypothèse 1 . . . 95
4.3.2 Hypothèse 2 . . . 98
4.3.3 Résultat du test basé sur le facteur de Bayes . . . 98

5 Médiation à variable d'exposition ordinale 103
5.1 Contexte de l'étude et objectif . . . 104
5.1.1 Contexte de l'étude . . . 104
5.1.2 Objectifs de l'étude . . . 105
5.2 Modélisation statistique . . . 106
5.2.1 Modèle linéaire à variable explicative catégorielle . . . 106
5.2.2 Modèle de médiation à variable d'exposition catégorielle : Effets directs et indirects relatifs . . . 108

5.2.3 Retour à l'hypothèse de recherche 108
5.3 L'alternative bayésienne 109
5.3.1 $G-$prior pour variable exogène catégorielle 109
5.3.2 Modélisation du problème 110
5.4 Résultats et discussion 112

6 Detection of outliers with a Bayesian hierarchical model : application to the single-grain luminescence dating method. 115
6.1 Introduction 115
6.2 Detection of outliers 116
6.2.1 Decision rule for detecting outliers 117
6.2.2 Processing outliers 117
6.3 Application to the combination of measurements 118
6.3.1 Model description 118
6.3.2 Simulation 120
6.4 Application to the determination of OSL age 124
6.4.1 The context 124
6.4.2 Data analysis : 127

Conclusion et perspectives 131

A Questionnaire mesurant le leadership habilitant 135

B α de Cronbach 136

C Facteur de Bayes pour les modèles linéaires 137

D Serial multiple mediator model 138

Bibliography 141

Chapitre 1

Introduction

L'essentiel des travaux présentés dans cette thèse est motivé par des questions soulevées par des problématiques issues de recherche en psychologie. En effet, depuis Septembre 2015, je suis PRAG de mathématiques affecté dans l'UFR de Psychologie à l'université de Nantes et je collabore avec les chercheurs des laboratoires de Psychologie de Nantes (LPPL [1], CREN [2] et BePsyLab [3]). Dans ces différentes collaborations, j'ai réalisé la modélisation, l'analyse statistique des données et la rédaction des résultats dans les publications. Ces travaux publiés ou en cours de publication dans des revues de psychologie sont listés ci-dessous. Ils ne sont pas intégrés dans ce manuscrit :

— Articles publiés ou acceptés :

1. Tessoulin, M., Galharret, J.-M., Gilet, A.-L., and Colombel, F. (2019). Misinformation Effect in Aging : A New Light with Equivalence Testing. The Journals of Gerontology : Series B. (Publié)
   Article de méthodologie sur l'utilisation du test d'équivalence en psychologie (voir Schuirmann (1987) pour la présentation de cette méthode).
2. Kindelberger, C. Mallet, P. Galharret, JM. (2019). Diversity of romantic experiences in late adolescence and their contribution to identity formation. Social development. (Publié)
3. Kindelberger, C., Safont-Mottay, C., Lannegrand-Willems, L., and Galharret, J. (2019). Searching for autonomy before the transition to higher education : how do identity and self-determined academic motivation co-evolve ? Journal of Youth and Adolescence. (Publié)

1. Laboratoire de Psychologie des Pays de la Loire (LPPL - EA 4638)
2. Centre de Recherche en Éducation de Nantes EA 2661
3. Bien-être & Processus de subjectivation EE

Articles en psychologie du développement. Le premier article porte sur le lien entre la motivation et les processus identitaires et le second sur le lien entre les expériences amoureuses et les processus identitaires. Dans ces deux articles, il s'agit d'études longitudinales, les modélisations ont été réalisées par des équations structurelles (voir Bollen (1989); Kline (2011) pour une présentation générale de ces modèles).

4. Bacro, F. Coudronnière C. and Galharret, J.-M. (2018). The French adaptation of the satisfaction with life scale (swls) : Factorial structure, age, gender and time-related invariance among children and adolescents. European Journal of developmental Psychology. (Publié).
   Articles de validation de questionnaires. Il s'agit d'analyses psychométriques basées sur des modèles de statistique multi-variée de la famille des analyses en composantes principales (voir Price (2016) pour une présentation détaillée de ces méthodes)

— Articles soumis ou en révision :

1. Caillée, A. Galharret, J.-M. and Joffrion, C. (2019). Influence du leadership habilitant sur le bien-être au travail et l'engagement organisationnel. Soumis dans Psychologie du Travail et des Organisations (août 2019).
   Article en psychologie du travail sur le lien entre les modes de management, le bien-être et l'engagement au travail. J'ai développé pour ce problème des modèles de médiation. Cette étude a servi de base pour une modélisation bayésienne alternative développée dans le chapitre 4 de la thèse.

— Preprint

1. Rommel, D., Galharret, J., Fleury-Bahy, G., and Navarro, O. (2018). Validation of a French version of the difficulties in emotion regulation scale short form (DERS-F sf).
   Articles de validation de questionnaires.
2. Ndobo, A., Faure, A., and Galharret, J. (2019). The coping strategies of individuals in multiple jeopardy settings : The case of older workers and job-seekers.
   Article en psychologie sociale sur le lien entre le cumul des discriminations et l'estime de soi. Il s'agit là encore de modèle de médiation appliqué en psychologie. Une alternative bayésienne est proposée dans le chapitre 5 de la thèse.

Mes travaux de thèse s'articulent autour de deux grands thèmes : l'analyse de médiation et la datation en archéologie. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre de la modélisation bayésienne appliquée à l'exception du chapitre 2.

Dans la section 1.1, je présente un état non exhaustif des connaissances sur la médiation et dans la section 1.2 un résumé de mes principales contributions. Les deux travaux correspondants ont donné lieu aux preprints suivants :

1. Galharret, J.-M., Philippe, A., and Rochet, P. (> 2019). Non-parametric mediation analysis for direct effect with binary outcomes [chapitre 2].
2. Galharret, J.-M. and Philippe, A. (>2019). Priors comparison in Bayesian mediation framework with binary outcome [chapitre 3].

En second lieu, j'ai proposé une méthodologie pour la datation par la méthode OSL en présence de valeurs aberrantes. Cette contribution est présentée dans la section 1.4.3 et le preprint correspondant est :
Galharret, J.-M., Philippe, A., and Mercier, N. (> 2019). Detection of outliers with a Bayesian hierarchical model : application to the single-grain luminescence dating method [chapitre 6].

Données réelles Les données des chapitres 2 et 3 proviennent d'une étude longitudinale sur l'évaluation du bien-être et de la qualité de vie à l'école. Cette étude a été menée dans le cadre d'un contrat entre la DEPP [4], l'Acsé [5] et l'Université de Nantes. J'ai contribué à l'analyse des données du rapport terminal [6]. Je tiens à remercier Philippe Guimard, responsable de l'axe 4 du CREN et porteur du projet au niveau de l'Université, pour m'avoir autorisé à utiliser ces données.

1.1 L'analyse de médiation

L'analyse de médiation est utilisée dans de nombreux domaines des sciences humaines et sociales mais également en médecine. Elle fait partie d'une problématique plus globale appelée analyse de la causalité. Le but de cette partie est d'introduire les notions minimales de causalité qui vont nous permettre de définir les effets naturels directs et indirects qui sont les quantités que nous avons choisies d'estimer et de tester dans Galharret et al. (2019b); Galharret and Philippe (2019).

L'analyse de médiation la plus simple concerne un triplet de variables (X, M, Y) où X, M sont des variables prédictives et Y une variable à expliquer. Connaissant l'effet de

4. Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance
5. Agence Nationale pour la Cohésion Sociale
6. Disponible à l'adresse http://cren.univ-nantes.fr/recherches/be-scol-be-scol-2-bien-etre-eleves-a-lecole-college-validation-dune-echelle-devaluation-multidimensionnelle-analyses-differentielles/

M sur Y, on étudie à travers quel mécanisme la variable X va agir sur la variable Y. Ainsi on évalue l'effet de X sur Y qui ne transite pas à travers M (l'effet direct) et l'effet de X sur Y via M (l'effet indirect). La difficulté dans la définition de ces effets est qu'ils vont être liés à la nature de la variable Y. Lorsque Y est continue ces définitions sont immédiates. Pour Y binaire (qui sera le cadre de ma thèse) j'estime ces effets à partir d'une définition dans le contexte de l'étude de la causalité (voir Robins and Greenland, 1992; Pearl, 2001; Imai and Keele, 2010) qui sera vraie sous certaines hypothèses.

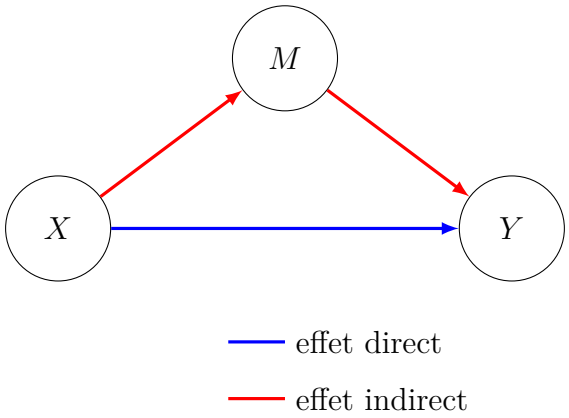


FIGURE 1.1 – Modèle de médiation.

Dans la suite :

— la variable X désigne la variable d'exposition, ou de traitement,

— la variable M désigne la variable médiatrice ou médiateur,

— la variable Y désigne la variable réponse.

1.1.1 L'effet causal : approche contrefactuelle

Les premières références concernant la réponse potentielle (*potential outcome*) sont présentes dans les travaux sur les plans expérimentaux de Fisher (1935) et de Neyman (1935). Le statisticien Rubin (1974) est le premier à proposer un modèle causal contrefactuel dans lequel pour un même individu il existe plusieurs résultats hypothétiques (les résultats potentiels), qui sont fonction de l'exposition de l'individu. La principale difficulté réside dans l'impossibilité d'observer la contrefactuelle. Ces travaux ont été prolongés par Robins and Greenland (1992); Pearl (2001). L'ouvrage récent de Pearl and Mackenzie (2018) donne un état de l'art sur l'analyse causale.

X binaire

Pour définir l'effet causal, on définit deux nouvelles variables aléatoires Y_0, Y_1 appelées variables contrefactuelles dont les valeurs correspondent à ces réponses potentielles :

— $Y_0(u)$ serait la réponse si l'individu u n'avait pas été exposé,

— $Y_1(u)$ serait la réponse si l'individu u avait été exposé .

Example 1.1.1. *Considérons X le fait de dédoubler ou pas la classe en CP dans des zones considérées ZEP et Y le niveau en mathématiques des élèves. Y peut être binaire (0 : en-dessous des attendus, 1 : au-dessus des attendus), ou mesurée (moyenne des notes de l'élève en mathématiques). Pour un élève u donné, étant donnée l'absence d'information dans l'état où il n'est pas observé, nous nous intéressons à un effet agrégé à la population, le plus souvent la moyenne.*

Definition 1.1.2. *(voir Robins and Greenland, 1992; Pearl, 2001) A partir des variables contrefactuelles Y_0 et Y_1, l'effet moyen causal de X sur Y est défini par :*

$$\psi_0 = \mathbb{E}\Big(Y_1 - Y_0\Big) \tag{1.1}$$

Aucune des deux variables Y_0 et Y_1 n'est observable, par contre si l'on considère un échantillon $(X_i, Y_i)_{i\text{Â } \in\{1,\dots,n\}}$, les résultats observés sur les individus peuvent être utilisés pour connaître la valeur de ψ_0 :

— les individus ayant été exposés vont contribuer à l'information de $\mathbb{E}(Y_1)$

— ceux qui ne l'auront pas été contribueront à l'information de $\mathbb{E}(Y_0)$

Cette hypothèse s'appelle l'hypothèse de consistance, elle peut être énoncée de la façon suivante :

Hypothèse de consistance Pour un individu u donné, on suppose que la réponse Y observée correspond à la valeur potentielle correspondant à son exposition $X(u) = x$. Autrement dit, on suppose que

$$X(u) = x \implies Y(u) = Y_x(u) \tag{1.2}$$

pour tout individu u, ce que l'on peut aussi écrire de façon condensée par $Y = Y_X$.

Retour à Exemple 1.1.1 supposons que Y est la moyenne en mathématique

Ind	X	Y	Y_0	Y_1
1	0	12	**12**	0
2	0	8	**8**	0
3	1	14	1	**14**
4	1	9	1	**9**

TABLE 1.1 – Exemple de jeu de données pour illustrer la notion de variable contrefactuelle. Pour ce jeu de données fictif l'hypothèse de consistance est vérifiée.

Estimation A ce stade on n'est toujours pas en mesure d'estimer $\mathbb{E}(Y_1)$ et $\mathbb{E}(Y_0)$. Néanmoins, on sait estimer

$$\psi := \mathbb{E}(Y|X=1) - \mathbb{E}(Y|X=0)$$

où ψ désigne dans la littérature l'association entre X et Y et correspond à la notion d'effet total dans l'approche du modèle de régression linéaire. En général, on a

$$\psi_0 \neq \psi$$

alors que ψ peut être naïvement considéré un estimateur naturel de ψ_0. Dans la table 1.1, on constate par exemple que $\psi_0 = -0.25$ alors que $\psi = 1.5$.

On introduit des hypothèses supplémentaires sur les variables contrefactuelles pour obtenir l'égalité $\psi = \psi_0$.

Proposition 1.1.3. *Sous l'hypothèse de consistance et si de plus on suppose que $Y_x \perp\!\!\!\perp X$ pour $x \in \{0,1\}$, et que $0 < \mathbb{P}(X=0) < 1$ alors on a $\psi_0 = \psi$.*

Démonstration. C'est immédiat puisque X et Y_1, Y_0 sont des variables aléatoires indépendantes ce qui donne :

$$\psi_0 = \mathbb{E}(Y_1) - \mathbb{E}(Y_0) = \mathbb{E}(Y_1|X=1) - \mathbb{E}(Y_0|X=0)$$

La relation de consistance (1.2) permet alors d'obtenir $\psi = \psi_0$. □

Remark 1.1.4. *L'hypothèse $Y_x \perp\!\!\!\perp X$ s'appelle **l'hypothèse d'ignorabilité**. Elle signifie que le fait d'avoir affecté un individu dans l'un des deux groupes n'a aucun effet sur la valeur potentielle Y_x.*

Sous les hypothèses de la proposition précédente on peut obtenir un estimateur de ψ_0

à partir d'un échantillon $(X_i, Y_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$:

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i \mathbb{1}_{X_i=1}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i=1}} - \frac{\sum_{i=1}^n Y_i \mathbb{1}_{X_i=0}}{\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{X_i=0}}$$

Une alternative possible est de construire une estimation (paramétrique ou non) de la loi conditionnelle de Y sachant X puis de simuler les variables contrefactuelles en utilisant le modèle estimé et la relation de consistance. Ceci donne l'algorithme suivant :

Algorithme d'estimation de l'effet causal : On considère un échantillon $(X_i, Y_i)_{i=1,\dots,n}$ observé et on note $\widehat{f}(\bullet|X)$ un estimateur de la loi conditionnelle de Y sachant X.

1. `On génère pour` $x = 1$ `un échantillon` $Y_1^{(1)}, \dots, Y_1^{(T)}$ `avec pour tout` $t \in \{1, ..., T\}$

$$Y_1^{(t)} \sim \widehat{f}(\bullet|X = 1)$$

2. `On génère pour` $x = 0$ `un échantillon` $Y_0^{(1)}, \dots, Y_0^{(T)}$ `avec pour tout` $t \in \{1, ..., T\}$

$$Y_0^{(t)} \sim \widehat{f}(\bullet|X = 0)$$

3. `L'estimateur de` ψ_0 `est alors`

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(Y_1^{(t)} - Y_0^{(t)}).$$

Cette approche est inspirée de celle introduite par Imai and Keele (2010) dans un cadre paramétrique bayésien.

Remark 1.1.5. *Lorsque Y est continue, l'effet causal de la variable d'exposition X sur Y continue peut être estimé dans le cadre du modèle linéaire, on écrit :*

$$Y = c_0 + \psi X + \varepsilon_1 \tag{1.3}$$

avec ε_1 centré de variance σ_1^2. Sous les hypothèses de consistance et d'ignorabilité l'effet causal de X sur Y est alors

$$\psi_0 = \psi.$$

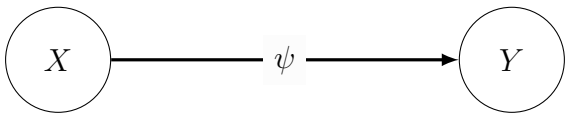


FIGURE 1.2 – Estimation de l'effet causal de X sur Y dans le cadre de la régression linéaire.

Plus généralement, si on suppose que la loi conditionnelle appartient à une famille paramétrique $\{f_\theta(\bullet|X), \theta \in \Theta\}$.

1. `On simule un échantillon` $(\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(B)})$ `suivant la loi a posteriori de` θ `(loi conditionnelle de` θ `sachant les observations` $(X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$`) .`
2. `Pour chaque` $b \in \{1, \ldots, B\}$
   (a) `On génère pour` $x = 1$ `un échantillon` $Y_1^{(1,b)}, \ldots, Y_1^{(T,b)}$ `avec pour tout` $t \in \{1, ..., T\}$
   $$Y_1^{(t,b)} \sim f_{\theta^{(b)}}(\bullet|X = 1)$$
   (b) `On génère pour` $x = 0$ `un échantillon` $Y_0^{(1)}, \ldots, Y_0^{(T)}$ `avec pour tout` $t \in \{1, ..., T\}$
   $$Y_0^{(t,b)} \sim f_{\theta^{(b)}}(\bullet|X = 0)$$
3. `L'estimateur de` ψ_0 `est alors`
   $$\frac{1}{BT} \sum_{b=1}^{B} \sum_{t=1}^{T} (Y_1^{(t,b)} - Y_0^{(t,b)}). \tag{1.4}$$

Example 1.1.6. *Pour illustrer le comportement de l'estimateur défini dans* (1.4)*, on considère le modèle logistique suivant :*

$$\mathbb{P}(Y = 1|X) = \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 X)}},$$

où la variable d'exposition X est binaire telle que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0)$. La loi a priori choisie est celle de Zellner c'est à dire

$$(\beta_0, \beta_1) \sim \mathcal{N}_2(0, 4N^2(\phi'\phi)^{-1})$$

où $\phi = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{pmatrix}$ *et N le nombre d'observations. Sur des données simulées, on compare*

l'estimation obtenue en utilisant (1.4) *et celle obtenue en utilisant*

$$\frac{1}{1+e^{-(\widehat{\beta}_0+\widehat{\beta}_1)}} - \frac{1}{1+e^{-\widehat{\beta}_0}}$$

où $(\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1)$ *est l'estimation du maximum de vraisemblance du modèle logistique (MLE).*

Les données sont simulées en prenant les paramètres suivants : $N = 50$, $(\beta_0, \beta_1) = (1, -2)$. *Sous les hypothèses de la proposition 1.1.3, l'effet causal à estimer est égal à* $\psi_0 = -0.462$. *La figure 1.3 représente les boxplots de* 1000 *réplications des estimateurs. Dans ce contexte, les performances de ces estimateurs sont assez similaires.*

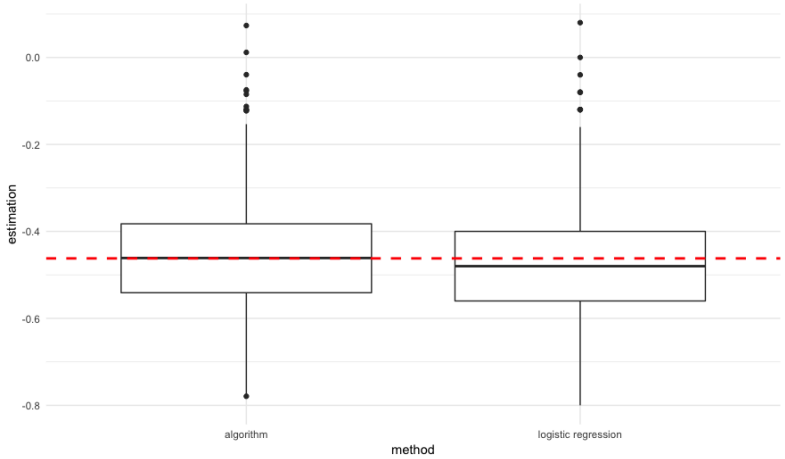


FIGURE 1.3 – Comparaison des deux estimateurs de l'effet causal décrits dans l'exemple 1.1.6. La ligne en pointillés indique la vraie valeur de ψ_0.

X continue

Supposons que la variable $X \in \mathcal{X}$, on définit alors la fonction aléatoire contrefactuelle $(Y_x)_{x\in\mathcal{X}}$, Y_x étant la réponse potentielle si le sujet avait été exposé à la valeur $X = x$. On définit alors la fonction de régression causale $\psi_0(x) := \mathbb{E}(Y_x)$ et la fonction de régression $\psi(x) := \mathbb{E}(Y|X = x)$. Comme précédemment en général on a : $\psi_0(x) \neq \psi(x)$, mais sous des hypothèses de consistance et d'ignorabilité on obtient

$$\psi_0(x) = \psi(x), \qquad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Effet causal en présence de covariable(s)

Soit W une covariable (ou un vecteur de covariables) à X, on retrouve l'effet causal en regardant la définition précédente en présence de W

$$\psi_0 = \int \Big[\mathbb{E}(Y_1|W=w) - \mathbb{E}(Y_0|W=w)\Big] \,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_W(w).$$

Retour à Exemple 1.1.1 *On suppose également avoir connaissance d'un ensemble de covariables notées W sur l'élève (par exemple CSP des parents, niveau d'étude des parents, son âge, ...).*

Pour identifier ψ_0 il faut considérer une nouvelle hypothèse d'ignorabilité qui cette fois est définie comme l'indépendance de Y_x et X conditionnellement à W pour tout $x \in \{0,1\}$:

$$Y_x \perp\!\!\!\perp X|W$$

ce qui permet d'obtenir la proposition suivante :

Proposition 1.1.7. *On suppose que l'hypothèse de consistance est vérifiée, que pour tout $w \in \mathcal{W}$ tel que $\mathbb{P}(w) > 0$ on a $0 < \mathbb{P}(X=1|W=w) < 1$ et que l'hypothèse d'ignorabilité conditionnelle $Y_x \perp\!\!\!\perp X|W$ est vérifiée pour $x \in \{0,1\}$. Sous ces conditions ψ_0 est identifiable et on a :*

$$\psi_0 = \int \Big[\mathbb{E}(Y|X=1,W=w) - \mathbb{E}(Y|X=0,W=w)\Big] \,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_W(w).$$

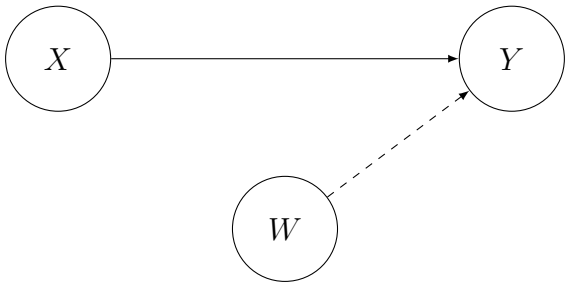


FIGURE 1.4 – Modèle avec covariable

Estimation de ψ_0 Considérons de nouveau le modèle logistique :

$$\mathbb{P}(Y=1|X,W) = \frac{1}{1+e^{-(c_0+\psi X+\eta W)}}$$

et supposons que la covariable W admette pour densité f_{θ_W}. On peut utiliser le modèle bayésien ci-dessous pour estimer $\theta := (c_0, \psi, \eta, \theta_W)$.

$$\mathcal{L}_\theta(\underline{Y}, \underline{X}, \underline{W}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{e^{-(1-y_i)(c_0+\psi X_i+\eta W_i)}}{1+e^{-(c_0+\psi X_i+\eta W_i)}} f_{\theta_W}(W_i)$$

où par exemple $\underline{Y}$ désigne le vecteur $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ de N observations indépendantes de la variable Y.

La distribution a posteriori de θ est

$$\pi(\theta|\underline{Y}, \underline{W}, \underline{X}) \propto \mathcal{L}_\theta(\underline{Y}, \underline{X}, \underline{W})\pi(\theta).$$

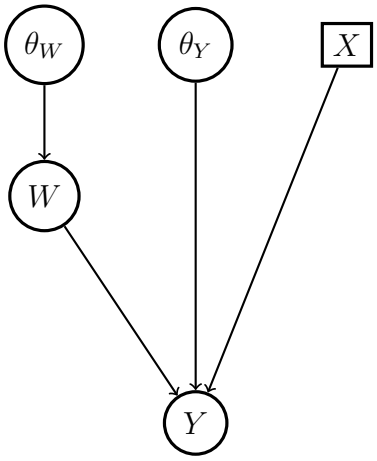


FIGURE 1.5 – DAG (Directed Acyclic Graph) du modèle

La loi jointe de ce modèle conditionnellement à X décrite dans le DAG (figure 1.5) est donnée par

$$p(\theta, W, Y|X) = p(Y|\theta_Y, X, W)p(\theta_Y|X, W)p(W|\theta_W)p(\theta_W)$$

$p(Y|\theta_Y, X, W)$ est donnée par le modèle logistique. En l'absence d'information sur θ :

— $p(\theta_Y|X, W)$ est la densité de probabilité des G-priors pour les modèles de régression logistique. On a

$$\theta_Y|X, W \sim \mathcal{N}_3(0, 4N^2(\phi_Y'\phi_Y)^{-1})$$

où ϕ_Y est la matrice $N \times 3$ telle que : $\phi_Y = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & w_N \end{pmatrix}$. Dans toute la suite, on notera une telle matrice sous la forme :

$$\phi_Y = \left[\mathbb{1}_N, X, W\right]$$

— Selon la nature de la variable W on prendra une loi a priori non informative adaptée (par exemple une loi uniforme pour $p \in [0,1]$ lorsque la variable $W \sim \mathcal{B}(p)$).

On peut alors utiliser l'algorithme suivant :

1. `On simule un échantillon` $(\theta^{(1)}, \ldots, \theta^{(B)})$ `suivant la loi a posteriori de` θ `(loi conditionnelle de` θ `sachant les observations` $(X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$`) .`
2. `pour chaque` $b \in \{1, \ldots, B\}$ `et` $x = 0, 1$`: on génère un échantillon` $W_1^{(b)}, \ldots, W_T^{(b)}$ `avec pour tout` $t \in \{1, ..., T\}$

$$W_t^{(b)} \sim f_{\theta_W^{(b)}}$$

3. `On calcule`

$$\psi_0^{(b)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} \Big[\frac{1}{1 + e^{-(c_0^{(b)} + \psi^{(b)} + \eta^{(b)} W_t^{(b)})}} - \frac{1}{1 + e^{-(c_0^{(b)} + \eta^{(b)} W_t^{(b)})}} \Big].$$

L'échantillon $(\psi_0^{(b)})_{b \in \{0,\ldots,B\}}$ ainsi construit est un échantillon simulé selon la loi a posteriori de ψ_0 (loi conditionnelle de ψ_0 sachant les observations $(X_i, Y_i)_{i=1,\ldots,n}$). Celui-ci permettra en particulier de construire des intervalles de crédibilité.

Example 1.1.8. *Pour illustrer cet algorithme, on simule les données suivant le modèle :*

— $W \sim \mathcal{B}(0.70)$

— X *exposition binaire telle que* $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 0)$

— Y *variable réponse binaire telle que*

$$\mathbb{P}(Y = 1 | X, W) = \frac{1}{1 + e^{-(2 + X - 3W)}}$$

Comme dans l'exemple précédent on va comparer l'estimation obtenue avec l'algorithme à l'estimation obtenue avec le MLE. Pour le MLE, là encore, on utilise une approche

similaire à celle de Imai et al. (2010b). Ceci nous permet d'obtenir l'estimation suivante :

$$\frac{1}{\#N_1}\sum_{i\in N_1}\left(\frac{1}{1+e^{-(\widehat{c_0}+\widehat{\psi}+\widehat{\eta})}}-\frac{1}{1+e^{-(\widehat{c_0}+\widehat{\eta})}}\right)+\frac{1}{n-\#N_1}\sum_{i\notin N_1}\left(\frac{1}{1+e^{-(\widehat{c_0}+\widehat{\psi})}}-\frac{1}{1+e^{-(\widehat{c_0})}}\right)$$

où $N_1 = \{i \in 1, ..., n : W_i = 1\}$ *et* $\#$ *désigne le cardinal de l'ensemble. On constate que comme précédemment les résultats sont similaires (figure 1.6)*

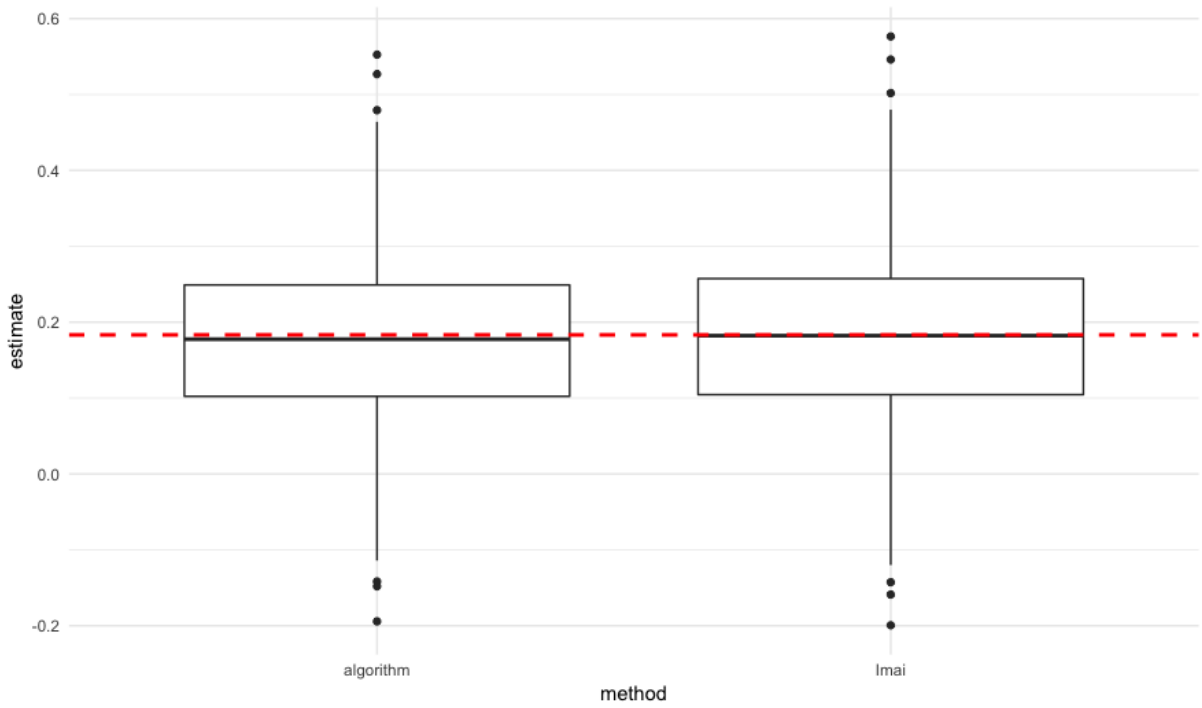


FIGURE 1.6 – Comparaison des deux estimateurs sur $T = 1000$ réplications.

1.1.2 Le modèle de médiation

On va tout d'abord s'intéresser au modèle de régression linéaire qui est le plus classique et le plus utilisé. Ensuite on définira les effets directs et indirects (qui sont dans la littérature l'effet naturel direct et indirect) que l'on veut estimer. Pour estimer et tester ces effets, l'un des cadres naturel utilisé dans la littérature en sciences humaines et sociales est la modélisation en équations structurelles qui permet de considérer des liens entre des variables latentes (voir Bollen, 1989; Kenny et al., 1998, par exemple). Dans la suite du chapitre, ces effets directs et indirects sont généralisés à l'analyse causale.

Le modèle classique : Y, M continues

On peut écrire un système de deux équations pour décrire le modèle de médiation :

$$Y = \beta_0 + \beta M + \gamma X + \varepsilon_2 \tag{1.5}$$
$$M = \alpha_0 + \alpha X + \varepsilon_3 \tag{1.6}$$

où $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ sont des variables aléatoires centrées et indépendantes. On définit alors :

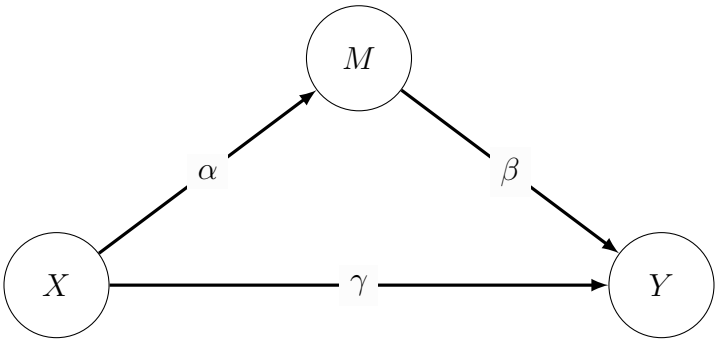


FIGURE 1.7 – Effet direct et indirect de X sur Y.

— l'effet direct de X sur Y est γ donné par (1.5)

— l'effet indirect de X sur Y est $\alpha\beta$ avec α dans (1.6) et β dans (1.5).

Dans ce modèle, en substituant M dans (1.5) par son expression dans (1.6) on obtient l'égalité suivante :

$$\psi = \gamma + \alpha\beta \tag{1.7}$$

où ψ est défini dans (1.3). C'est à dire que dans le cadre du modèle linéaire l'effet total se décompose comme la somme de l'effet direct et de l'effet indirect. Dans les analyses de médiation, vient ensuite la question de l'existence (la significativité) de l'effet direct et de l'effet indirect.

Test sur l'effet direct : Cette question ne pose aucune difficulté dans le cas du modèle linéaire puisqu'il s'agit uniquement de tester $\mathcal{H}_0 : \gamma = 0$. Lorsque les résidus sont distribués normalement, on peut utiliser un test de Student pour tester $\mathcal{H}_0$.

Test sur l'effet indirect : Il s'agit de tester $\mathcal{H}_0 : \alpha\beta = 0$ ou bien de façon équivalente $\mathcal{H}_0 : \psi = \gamma$ d'après (1.7). Sobel (1982) utilisa la Delta méthode pour construire des inter-

valles de confiance asymptotiques pour ce produit. C'est l'approche proposée dans l'article historique de Baron and Kenny (1986). MacKinnon et al. (2002) comparent des alternatives au test sur l'effet indirect proposé par Sobel (1982). Ils comparent leur puissance à l'aide d'une méthode de Monte Carlo. Pour palier le manque de puissance de ces tests, Shrout and Bolger (2002); MacKinnon et al. (2004) proposèrent une approche bootstrap respectivement pour tester l'existence de l'effet indirect et pour estimer la distribution de $\widehat{\alpha}\widehat{\beta} - \alpha\beta$. Cette approche est encore actuellement privilégiée dans la plupart des applications et implémentée dans les packages de `R` qui concernent la médiation (voir par exemple Imai et al., 2010a; Steen et al., 2017). Par ailleurs, Hayes (2018) et VanderWeele (2015) ont également développé des macros pour SPSS et SAS pour estimer et tester ces effets dans les modèles de médiation et utilisent cette approche.

Extensions du modèle linéaire

L'extension naturelle du modèle linéaire est le modèle à effets mixtes. Comme première application, on peut considérer les modèles multi-niveaux. Krull and Mackinnon (1999); Kenny and Bolger (2003) proposent des procédures d'estimation des effets directs et indirects pour ces modèles. La deuxième application concerne les données à mesures répétées, Judd et al. (2001) s'intéresse à l'estimation de ces effets sur des variables intra-individuelles. Ces deux types de modélisations peuvent être intégrées dans des modèles en équations structurelles.

Le modèle à réponse Y binaire

Considérons un modèle à réponse binaire ($Y \in \{0, 1\}$). On se place dans un des cas les plus classiques qui consiste à modéliser la probabilité qu'un individu appartienne au groupe $Y = 1$ par un modèle logistique :

$$\begin{aligned}
\text{logit}\Big(\mathbb{P}(Y = 1|X)\Big) &= c_0 + \psi X && (1.8)\\
\text{logit}\Big(\mathbb{P}(Y = 1|X, M)\Big) &= \beta_0 + \beta M + \gamma X && (1.9)\\
M &= \alpha_0 + \alpha X + \varepsilon_3 && (1.10)
\end{aligned}$$

On définit de la même façon la notion d'effet total de X sur Y en posant :

$$\begin{aligned} \psi &= \mathbb{E}(Y|X=x) - \mathbb{E}(Y|X=x-1) \\ &= \frac{1}{1+e^{-(c_0+\psi x)}} - \frac{1}{1+e^{-(c_0+\psi(x-1))}} \end{aligned} \tag{1.11}$$

On définit comme précédemment les effets directs et indirects en considérant que l'effet direct est γ et l'effet indirect $\alpha\beta$. Néanmoins, l'égalité

$$\alpha\beta = \psi - \gamma$$

qui était vraie pour Y continue ne l'est plus dans ce cas. MacKinnon (2008) [chapitre 11] propose de corriger la valeur estimée de ψ (notée $\widehat{\psi}_c$) ce qui permet d'obtenir

$$\widehat{\alpha}\widehat{\beta} \simeq \widehat{\psi}_c - \widehat{\gamma}$$

Je me suis intéressé à une autre définition (voir Robins and Greenland, 1992) des effets directs et indirects qui sont les effets naturels directs et indirects (notés respectivement NDE et NIE) . Ils coincident avec les effets directs et indirects lorsque Y est continue et sont différents lorsque Y est binaire (voir chapitre 3). Par contre, dans le cas où X, Y sont binaires et sous des hypothèses garantissant l'existence des effets naturels directs et indirects, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha\beta = 0 &\iff \text{NIE}(0) = \text{NIE}(1) = 0 \\ \gamma = 0 &\iff \text{NDE}(0) = \text{NDE}(1) = 0 \end{aligned}$$

Ces deux équivalences sont prouvées dans la section 3.9.2.

1.1.3 L'effet naturel direct et indirect

Ces définitions ont été proposées dans Robins and Greenland (1992), Pearl (2001), Imai et al. (2010a). Le modèle de médiation simple (X, M, Y, W) est résumé par la figure 1.8. On se place de nouveau dans le cas où X est binaire, on généralisera ensuite au cas $X \in \mathcal{X}$.

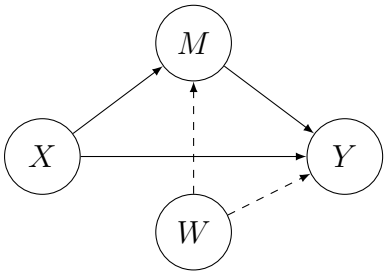


FIGURE 1.8 – Modèle de médiation incluant une covariable W

Cas où X est binaire

On définit deux vecteurs de variables contrefactuelles : $\Big(M_0, M_1\Big)$ et $\Big(Y_0, Y_1\Big)$ et une variable contrefactuelle $Y_{x,m}$ correspondant à $X = x, M = m$. Ceci permet de donner un sens à Y_{1,M_0} : il s'agit de la réponse potentielle Y correspondant à l'individu lorsqu'il appartient au groupe $X = 1$ et à la valeur potentielle M_0 du médiateur lorsque ce même individu appartient au groupe $X = 0$. On suppose que la relation de consistance est vraie pour M et pour Y c'est à dire que $M_x = M$ et $Y_x = Y$ pour $x = 0, 1$. On doit aussi imposer de nouvelles relations de consistance :

C1 $M_{x^*} = m \implies Y_{x,M_{x^*}} = Y_{x,m}$

C2 $X = x$ and $M = m \implies Y = Y_{x,m}$

C3 $X = x^* \implies M = M_{x^*}$

Ainsi sous ces hypothèses on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\psi_0 &= \mathbb{E}\Big(Y_1 - Y_0\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(Y_{1,M_1} - Y_{0,M_0}\Big) \\
&= \mathbb{E}\Big(Y_{1,M_1} - Y_{0,M_1} + Y_{0,M_1} - Y_{0,M_0}\Big) \\
&= \mathbb{E}(Y_{1,M_1} - Y_{0,M_1}) + \mathbb{E}(Y_{0,M_1} - Y_{0,M_0})
\end{aligned}$$

L'effet naturel direct (moyen) (on le notera dans la suite NDE) de $X = x$ sur Y est par suite défini par :

$$\text{NDE}(x) := \mathbb{E}\Big(Y_{1,M_x} - Y_{0,M_x}\Big) \tag{1.12}$$

et l'effet naturel indirect (moyen) de $X = x$ sur Y par l'intermédiaire de M est :

$$\text{NIE}(x) := E\Big(Y_{x,M_1} - Y_{x,M_0}\Big) \tag{1.13}$$

Avec ces définitions on peut ainsi ré-écrire :

$$\psi_0 = \text{NDE}(0) + \text{NIE}(1) = \text{NDE}(1) + \text{NIE}(0).$$

Estimation naïve Comme précédemment, si on connaissait pour chaque individu de l'échantillon les valeurs potentielles $\left(M_x(u_i), Y_{x^*,M_x(u_i)}(u_i)\right)$ pour chaque individu u_i de l'échantillon, alors les quantités ci-dessous seraient des estimateurs consistants respectivement de NDE(x) et NIE(x) :

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{1,M_x}(u_i) - Y_{0,M_x}(u_i)\right)$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_{x,M_1}(u_i) - Y_{x,M_0}(u_i)\right)$$

Cas X quelconque

Pour ce qui concerne la généralisation au cas X quelconque, on peut écrire la fonction de régression causale

$$\psi_0(x) = \mathbb{E}(Y_{x,M_x} - Y_{x^*,M_x}) + \mathbb{E}(Y_{x^*,M_x} - Y_{x^*,M_{x^*}}) + \psi_0(x^*)$$

On pose $\text{NDE}(x, x^*) := \mathbb{E}(Y_{x,M_x} - Y_{x^*,M_x})$ et $\text{NIE}(x, x^*) := \mathbb{E}(Y_{x^*,M_x} - Y_{x^*,M_{x^*}})$. L'effet causal entre deux valeurs x et x^* sera donc dans ce cas

$$\psi_0(x) - \psi_0(x^*) = \text{NDE}(x, x^*) + \text{NIE}(x, x^*)$$

1.1.4 Identification des effets naturels directs et indirects

Cas X binaire

Comme pour ce qui concerne l'effet causal il faut pouvoir identifier $\text{NDE}(x), \text{NIE}(x)$. De nombreuses hypothèses existent dans la littérature (voir Pearl, 2001; Petersen et al., 2006; Robins, 2003) on peut, en particulier, utiliser les hypothèses de cohérence ci-dessous et les hypothèses dites d'ignorabilité conditionnelle :

I1 $Y_{x,m} \perp\!\!\!\perp X|W$

I2 $Y_{x,m} \perp\!\!\!\perp M|(X, W)$

I3 $M_x \perp\!\!\!\perp X|W$

I4 $Y_{x,m} \perp\!\!\!\perp M_{x'}|W$

Proposition 1.1.9. *Si les hypothèses C1 à C3 et I1 à I4 sont vérifiées, alors* $\mathrm{NDE}(x), \mathrm{NIE}(x)$ *sont identifiables et on a :*

$$\mathrm{NDE}(x) = \iint \Big[\mathbb{E}(Y|X=1, M=m, W=w) - \mathbb{E}(Y|X=0, M=m, W=w)\Big] \\ \mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M|X=x,W=w}(m)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_W(w) \tag{1.14}$$

$$\mathrm{NIE}(x) = \iint \mathbb{E}(Y|X=x, M=m, W=w)\Big[\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M|X=1,W=w}(m) - \mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M|X=0,W=w}(m)\Big] \\ \mathrm{d}\,\mathbb{P}_W(w) \tag{1.15}$$

où $\mathbb{P}_{M|X=x,W=w}$ *est la loi de* M *conditionnellement à* $X=x, W=w$ *et* $\mathbb{P}_W$ *est la loi de* W*.*

Démonstration. Cette démonstration est une adaptation de celle d'Imai et al. (2010b) elle est donnée en annexe de l'article au chapitre 3.

□

Cas X continue

Les égalités (3.2) et (3.3) se généralisent dans le contexte de X continue et donc on obtient une identification de $\mathrm{NDE}(x, x'), \mathrm{NIE}(x, x')$ (voir par exemple VanderWeele, 2015) :

$$\mathrm{NDE}(x, x^*) = \iint \Big[\mathbb{E}(Y|X=x, M=m, W=w) - \mathbb{E}(Y|X=x^*, M=m, W=w) \\ \mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M|X=x,W=w}(m)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_W(w) \tag{1.16}$$

$$\mathrm{NIE}(x, x^*) = \iint \mathbb{E}(Y|X=x, M=m, W=w)\Big[\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M|X=x,W=w}(m) - \mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M|X=x^*,W=w}(m)\Big] \\ \mathrm{d}\,\mathbb{P}_W(w) \tag{1.17}$$

Retour au modèle linéaire : Revenons au modèle linéaire c'est à dire avec (X, M, Y) des variables aléatoires continues. On estime Y par le modèle de régression

$$\mathbb{E}(Y|X, M) = \beta_0 + \beta M + \gamma X + \nu 2W$$

et on suppose que

$$M|X, W \sim \mathcal{N}(\alpha_0 + \alpha X + \nu_1 W, \sigma^2),$$

on obtient facilement en partant des relations (1.16) et (1.17) :

$$\begin{aligned} \mathrm{NDE}(x, x^*) &= \gamma(x - x^*) \\ \mathrm{NIE}(x, x^*) &= \beta\alpha(x - x^*) \end{aligned}$$

Donc si $x^* = x-1$ $\mathrm{NDE}(x, x-1) = \gamma$ et $\mathrm{NIE}(x, x-1) = \alpha\beta$. On retrouve les définitions usuelles de l'effet direct et de l'effet indirect dans le cadre du modèle linéaire.

1.2 Contribution à l'analyse de médiation

1.2.1 Le test non paramétrique de l'effet direct

Dans le chapitre 2, le modèle étudié est un modèle de médiation (X, M, Y) avec X, M continues et Y binaire. Le but de ce chapitre est de proposer une approche non paramétrique pour tester l'existence de l'effet direct de X sur Y. Sous les hypothèses précédemment discutées on peut identifier $\mathrm{NDE}(x, x^*)$ pour $x, x^* \in \mathcal{X}$ par (1.16) dans le cas où le modèle n'admet pas de covariable :

$$\mathrm{NDE}(x, x^*) = \int \Big[\mathbb{E}(Y|X = x, M = m) - \mathbb{E}(Y|X = x^*, M = m)\, \mathrm{d}\, \mathbb{P}_{M|X=x}(m) \tag{1.18}$$

L'hypothèse testée est

$$\mathcal{H}_0 : \mathrm{NDE}(x, x^*) = 0, \text{ pour tout } x, x^* \in \mathcal{X}.$$

Si on se place dans le modèle paramétrique suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y|X, M) &= \frac{1}{1 + e^{-(\beta_0 + \beta M + \gamma X)}} \\ M &= \alpha_0 + \alpha X + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2), \end{aligned}$$

un calcul simple permet de prouver que l'hypothèse $\mathcal{H}_0$ est équivalente à $\gamma = 0$. Cette hypothèse peut donc être testée en utilisant le test du maximum de vraisemblance.

Limite de cette approche Ce type de modèle ne capte que des relations monotones entre $\mathbb{E}(Y|X, M)$ et X. Or dans certains problèmes ces relations ne sont pas monotones. Pour palier cette difficulté, je propose une approche non paramétrique dans le chapitre 2.

La procédure non paramétrique proposée Le paramètre

$$\theta := \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(Y|X,M) - \mathbb{E}(Y|M)\right|$$

que l'on va estimer par un estimateur à noyaux servira de statistique de test pour l'hypothèse $\mathcal{H}_0 : \theta = 0$ qui est une version plus forte de l'absence d'effet direct. On ne connait ni la loi, ni la loi asymptotique de cet estimateur et donc on l'approche par bootstrap. On montre que cette hypothèse est équivalente à l'absence d'effet direct dans de nombreux modèles paramétriques. Des simulations montrent que le test non paramétrique a une puissance assez proche de celle du test paramétrique dans le cas où le modèle paramétrique s'adapte aux données (cas monotone) et qu'il a une puissance beaucoup plus élevée dans le cas non-monotone. Enfin, j'applique cette méthodologie à une étude sur des données réelles.

1.2.2 Construction de différentes lois a priori informatives

Dans le chapitre 3 je propose des estimeurs des paramètres NDE et NIE définis dans (1.16) et (1.17). Imai et al. (2010a) propose l'algorithme ci-dessous pour estimer par exemple NDE(x), $x \in \{0,1\}$

Algorithme d'Imai et al. (2010a) pour estimer NDE(x) **:** On considère un échantillon $(X_i, M_i, Y_i, W_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, W étant une co-variable qui pour simplifier est supposée de dimension 1. On se place dans un cadre paramétrique suivant :

$$[M_0] : \begin{cases} \mathbb{E}(Y|X,M) = \dfrac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta M+\gamma X+\eta_1 W)}} \\ M = \alpha_0 + \alpha X + \eta_2 W + \varepsilon \end{cases}$$

où $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$. On estime les paramètres du modèle $\theta^M := (\alpha_0, \alpha, \eta_2)$, $\theta^Y := (\beta_0, \beta, \gamma, \eta_1)$ sur l'échantillon (par exemple par le maximum de vraisemblance).

1. `Soient` $(\theta_1^M, \dots, \theta_J^M)$, $(\sigma_1^2, \dots, \sigma_J^2)$ `et` $(\theta_1^M, \dots, \theta_J^Y)$ `des échantillons générés selon les lois asymptotiques des estimateurs de` $\theta^M, \sigma^2, \theta^Y$ [7].
2. `Pour tout` $j \in \{1, \dots, J\}$:
   (a) `pour tout` $i \in \{1, \dots, n\}$, $x \in \{0,1\}$ `on génère deux échantillons de`

7. il s'agit donc d'approximations quasi-bayésiennes

K `valeurs` $(M_x^{(i,j,k)})_{k\in\{1,\dots,K\}}$ `tel que`

$$M_x^{(i,j,k)} \sim \mathcal{N}(\alpha_0^j + \alpha^j x + \eta_2^j W_i, \sigma_j^2)$$

`(b) On calcule`

$$\delta^{(j)}(x) = \frac{1}{nK}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{1+e^{-(\beta_0^j+\beta^j M_x^{(i,j,k)}+\gamma^j+\eta_1^j W_i)}} - \frac{1}{1+e^{-(\beta_0^j+\beta^j M_x^{(i,j,k)}+\eta_1^j W_i)}}\right).$$

Ils obtiennent ainsi une estimation de NDE(x) en prenant la moyenne de $(\delta^{(j)}(x))_{j\in\{1,\dots,J\}}$. De même on peut obtenir une estimation de NIE(x).

La méthodologie proposée Partant de cet algorithme, je propose une version modifiée :

— L'ensemble des paramètres de $[M_0]$ est estimé dans un seul modèle bayésien. Ce modèle inclut une forme paramétrique pour la covariable W et ainsi l'estimation ne dépend plus de la taille de l'échantillon n.

— Une adaptation des $G-$priors est proposée pour ce modèle de médiation. Celle-ci est construite à partir de la loi jointe du modèle.

— Une comparaison de différentes lois a priori non informatives et une loi a priori informative Launay et al. (2015) est également proposée. Les lois non informatives sont les $G-$priors précédemment évoqués et une loi faiblement informative adaptée de Gelman et al. (2007). Les résultats numériques montrent une amélioration de la qualité de l'estimation lorsque l'information est correcte et une qualité équivalente même lorsque cette information s'avère erronée.

— On compare également les performances d'un test d'hypothèse basé sur les intervalles de crédibilité obtenus par l'inférence bayésienne pour tester l'absence d'effet direct et indirect. Les simulations montrent des performances similaires au test classique pour l'effet direct et de meilleures performances en termes de puissance de notre approche dans le cas de l'effet indirect. Ces comparaisons sont faites dans le cas où on ne dispose pas d'information a priori sur les paramètres du modèle.

1.3 Applications en psychologie

1.3.1 Les modèles et les outils de mesure en psychologie

Un modèle en psychologie va s'intéresser à des concepts et aux relations existant entre ses différents concepts. Un modèle peut être à visée prédictive ou seulement descriptive. La plupart des comportements humains ou des états psychologiques n'est pas directement mesurable. L'un des outils privilégié pour réaliser ces mesures est le questionnaire : il est soit auto-administré (c'est l'individu lui-même qui juge de son état) ou évalué par un tiers (un professionnel de santé par exemple). Ce questionnaire va dans un premier temps subir un processus de validation avant de pouvoir être utilisé (procédé similaire à l'étalonnage d'un instrument de mesure ou bien à une méthode d'analyse chimique ou biologique par exemple). Cette démarche permet de limiter les biais inhérents à toutes mesures (l'individu comprend-il correctement la question ? l'individu répond-il sincèrement à la question ? si l'individu repassait le questionnaire fournirait-il les mêmes réponses, ...). En particulier, le psychologue s'assurera que l'outil utilisé répond à trois qualités psychométriques (sensibilité, fidélité et validité). Dans le soucis d'une démarche scientifique, toutes ces qualités seront validées statistiquement. Ceci permettra de garantir la précision de l'outil utilisé. Un questionnaire est constitué d'items qui sont pour la plupart mesurés par des échelles dites de Likert. Un exemple commun d'échelle est coté entre : pas du tout d'accord (1), ..., et tout à fait d'accord (5). Les items qui sont fortement corrélés sont supposés correspondre à une variable latente commune. Le score de cette variable latente pour un individu est obtenu en calculant la moyenne (ou bien plus rarement la somme) des scores des items qui lui correspondent.

Par ailleurs, d'autres biais peuvent être induits par le type de passations. Par exemple, pour les passations en ligne, la question de la standardisation des passations reste ouverte, car il est difficile d'évaluer les conditions dans lesquelles les individus ont rempli le questionnaire. En outre, parmi les autres biais fréquemment rencontrés, on peut aussi citer les observations à valeurs manquantes. Ne pas tenir compte de ces valeurs manquantes peut induire non seulement une perte de précision mais aussi un biais dans la méthode d'analyse. Ces questions sont détaillées dans les ouvrages de Salini and Kenett (2011); Mair (2018). Elles ne sont pas abordées de façon plus approfondies dans la suite de ma thèse.

Exemple de questionnaire : Pour mesurer le LeaderShip Habilitant, qui est une nouvelle forme de management utilisée dans les entreprises et qui consiste à renforcer le

sens au travail, la confiance, la participation aux prises de décisions et l'autonomie des employés, Ahearne et al. (2005) propose un questionnaire composé de 12 questions [8]. Pour chacune des questions, les items sont évalués avec une échelle de Likert en 5 points : de pas d'accord (1) à tout à fait d'accord (5). Cette mesure du LeaderShip Habilitant se décompose en quatre dimensions (3 items par sous-échelle) :

— le sens au travail (questions 1-2-3),

— la participation aux prises de décisions (questions 4-5-6),

— la confiance (question 7-8-9),

— l'autonomie (10-11-12).

Les scores des différentes dimensions sont obtenus en calculant les moyennes des items qui les constituent. Ainsi les variables mesurées sont considérées comme des variables continues. Dans ce type de passation en entreprise, les réponses sont rendues anonymes pour éviter l'identification des répondants par leur hiérarchie.

1.3.2 Les modèles de médiation en psychologie

Les modèles de médiation utilisés en psychologie sont en général multi-variés : ils peuvent comporter plusieurs variables d'expositions, plusieurs médiateurs, plusieurs variables réponses. Dans ce cas, deux méthodologies sont usuellement utilisées :

— Estimation des effets avec une modélisation en équation structurelle (voir Bollen (1989) et Kline (2011) pour une présentation générale de ces modèles).

— Estimation des effets dans le modèle de régression linéaire multiple. (méthodologie proposée par MacKinnon (2008); Hayes (2018)).

Remark 1.3.1. *La première approche considère les variables d'intérêt comme latentes. Cette procédure est plus contraignante et pose souvent des problèmes de convergence du fait du nombre important de coefficients à estimer. Par ailleurs les estimations des effets directs et indirects est peu sensible à ce choix de modélisation (voir dans Hayes et al. (2017) pour une discussion à ce propos).*

Dans les deux applications présentées dans les chapitres 4 et 5, les modélisations ont été réalisées en utilisant la deuxième approche. En effet, les variables étudiées étaient mesurées par de nombreux items et de ce fait on pouvait s'attendre à ces problèmes de convergence.

8. Les questions sont données dans l'annexe A

1.3.3 Contribution

Dans les deux articles Caillé et al. (2019); Ndobo et al. (2019), j'ai appliqué des modèles de médiation à des problématiques issues de la psychologie sociale. La méthodologie retenue est basée sur des méthodes de régression classiques comme développées dans Hayes (2018). Dans les chapitres 4 et 5 je reprends ces deux modèles pour en proposer une version bayésienne. Là-encore, il s'agit pour ces modèles d'adaptation des $G-$priors (Zellner (1971)). Dans le chapitre 4, je me suis également intéressé à l'utilisation du facteur de Bayes pour comparer des modèles dans le cadre de la médiation modérée (notion qui sera définie dans ce chapitre). Je montrerai que les échelles de Jeffreys (1961); Kass and Raftery (1995) communément utilisées ne sont pas adaptées à la situation étudiée.

1.4 Les modélisations pour la datation en archéologie :

1.4.1 La datation par luminescence

La thermoluminescence est un phénomène physique lié à la capacité de certains cristaux (par exemple les quartz, feldspaths) d'accumuler l'énergie transmise par les rayonnements ionisants issus de la radioactivité et de restituer cette énergie sous forme de lumière lorsqu'ils sont chauffés.

Chaque chauffe va constituer une réinitialisation. On peut donc mesurer en laboratoire la dose équivalente absorbée D depuis la dernière chauffe en stimulant les cristaux (par exemple par la technique de luminescence optiquement stimulée, OSL). Connaissant le débit de dose $\dot{d}$ de la radioactivité naturelle, on peut ensuite déduire l'âge des cristaux A selon la relation fondamentale

$$D \stackrel{\mathcal{L}}{=} A\dot{d} \tag{1.19}$$

où $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ signifie que les deux variables ont la même loi. Le débit de dose $\dot{d}$ est du rayonnement radioactif auquel tous les cristaux analysés en laboratoire (unités statistiques) ont été soumis dans leur milieu naturel (avant les fouilles archéologiques).

Nous renvoyons le lecteur à Wallinga (2002) pour une présentation détaillée de cette méthode. Différentes approches statistiques ont été proposées pour estimer l'âge en tenant compte des incertitudes sur le débit de dose et sur la dose mesurée. Différents modèles bayésiens et fréquentistes ont été développés (voir Combès and Philippe (2017) et les références dans ce papier). Récemment Combès and Philippe (2017) proposent un mo-

dèle utilisant des erreurs systématiques (communes à tous les échantillons analysés d'un laboratoire) et des erreurs individuelles dont une version simplifiée peut s'écrire

$$D = A(\dot{d} + \epsilon), \text{ avec } \epsilon \sim N(0, \sigma_d^2)$$

La loi a priori sur l'âge A est choisie non informative, elle est du type

$$\pi_A(a) \propto \frac{1}{a}\mathbb{I}_{a>0}$$

Ce choix fournit une loi a posteriori explicite sur A donnée par :

$$\pi_{A|D}(a|D) \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}a^2\sigma_{\dot{d}}} \exp(-\frac{(a.\dot{d} - D)^2}{2a^2\sigma_{\dot{d}}^2})\mathbb{I}_{a>0}.$$

1.4.2 Le problème des valeurs aberrantes

Quelle que soit la méthode de datation utilisée, l'un des problèmes qui se pose est la présence de valeurs aberrantes dans les échantillons. En OSL, ces valeurs aberrantes viennent soit de grains mal blanchis, soit de problèmes d'échantillonnage sur le terrain (par exemple, des éboulis peuvent avoir eu lieu dans l'intervalle de temps d'enfouissement). Pour les grains mal blanchis, cela conduit à un âge plus vieux que l'âge cible, Galbraith et al. (1999) propose un modèle dit d'âge minimal dans ce contexte. Christophe et al. (2018) ont proposé une extension du modèle d'âge minimal en utilisant des techniques bayésiennes. Ce type d'approche ne permet pas de gérer des valeurs aberrantes issues de problèmes d'échantillonnage dans la mesure où les grains qui sont analysés à tort peuvent avoir un âge plus jeune ou plus vieux que l'âge cible. Ces méthodes utilisent comme information sur le débit de dose une valeur avec une incertitude que l'on modélise généralement par une gaussienne. Dans les travaux de Martin et al. (2018); Fang et al. (2018), un modèle de débit de dose est proposé en utilisant un processus stochastique permettant d'obtenir un échantillon simulé suivant la loi du débit de dose.

Le travail réalisé se situe dans ce contexte d'estimation de l'âge en présence d'outliers à partir

— de doses équivalentes d'erreurs de variances connues,

— d'un échantillon de débit de dose simulé par la méthode proposé par Martin et al. (2018); Fang et al. (2018).

Ce problème lié aux outliers apparait aussi dans la datation par le RadioCarbone et dans ce cas, de nombreuses approches ont été développées (par exemple OxCal Bronk Ram-

sey (1998)). Ces solutions proposées sont basées sur des modèles de mélange. Les modèles de mélange ne sont pas aisés à définir dans la mesure où l'on n'a pas de forme paramétrique des outliers. Plus récemment Lanos and Philippe (2017, 2018) ont proposé une méthode robuste pour estimer l'âge d'un événement archéologique (modèle d'âge central). C'est un modèle hiérarchique avec des effets aléatoires inspiré des modèles de méta-analyse. Dans Lanos and Philippe (2018), le modèle hiérarchique est défini par

$$\begin{aligned} X_i &= \theta_i + s_i\epsilon_i, \qquad \forall\, i = 1, ..., n \\ \theta_i &= \theta + \sigma_i\rho_i \end{aligned} \tag{1.20}$$

où $(\epsilon_1, ...\epsilon_n, \rho_1, ..., \rho_n)$ sont des variables i.i.d. suivant une gaussienne de moyenne 0 et de variance 1, et où les variances des erreurs $s_1^2, \ldots, s_n^2$ sont connues. Spiegelhalter et al. (2004) and Lanos and Philippe (2018) ont choisi les variances σ_i^2 i.i.d. suivant une loi du shrinkage uniforme, c'est à dire vérifiant :

$$\frac{C_0^2}{C_0^2 + \sigma_1^2} \sim \mathcal{U}niform[0, 1]$$

où C_0^2 est fixé. L'inconvénient principal de ce modèle est une importante perte d'efficacité et en particulier si l'échantillon ne possède pas de valeurs aberrantes.

1.4.3 Contribution à la modélisation en archéologie

Mes contributions sont les suivantes (Galharret et al., 2019a) :

- une modification de la loi a priori de Shrinkage de façon à obtenir des moments finis d'ordre p pour la loi a posteriori,
- une méthodologie d'estimation en deux étapes :
  - la loi a posteriori de l'hyper-paramètre σ_i est exploitée pour détecter les données aberrantes. En effet, en accord avec (1.20), σ_i donne une évaluation de la dispersion individuelle autour de l'âge central.
  - L'âge est ré-estimé sur le sous-échantillon dont les outliers ont été exclus. A cette étape, il n'est donc pas nécessaire d'utiliser une méthode robuste.

J'ai testé cette approche dans le même contexte que l'Event Model (Lanos and Philippe (2017, 2018)) de calcul d'âge central. Ensuite, cette approche a été étendue à l'estimation de l'âge OSL.

Les résultats numériques mettent clairement en évidence que, même si l'estimation finale est réalisée sur un plus petit échantillon, on obtient un gain important en termes de biais et de variance en faveur de notre approche par rapport à la méthode robuste (Event model) .

Chapitre 2

Non-parametric Mediation Analysis for direct effect with binary outcomes

Abstract The main objective of mediation analysis is to decompose the causal effect of X on Y into components that can be explained by the mediator M (denoted by average causal mediation effect or average natural indirect effect or indirect effect) and that cannot be explained by M (average direct causal effect or average natural direct effect or direct effect). A general definition of average natural direct effect (NDE) based on counterfactual variables was introduced by Pearl (2001). In this paper, we propose a non-parametric procedure to test a stronger definition of absence of this average natural direct effect. We show that this definition is equivalent to the absence of average natural direct effect for all distinct values x, x^* of X in most models of the literature. The simulations show that our approach performs better in non monotonic situations.

Keywords bootstrap, non-parametric regression, testing procedure, application to schoolchildren's well-being.

2.1 Introduction

Within the human sciences, mediation designates a particular causal phenomenon where the effect of a variable X on another variable Y passes (partially or entirely) through a third variable M (see Baron and Kenny (1986)). The study of mediation is particularly popular in psychology, sociology or marketing, as it allows the detection of variables that may trigger specific human behaviors.

In the mediation model, the total effect of X on Y is divided into the influence of X over Y in presence of M (the direct effect) and the part of this effect that reroutes through M (the indirect effect). For instance, Schmader and Johns (2003) have shown that a reduction in working memory capacity mediates the negative effect caused by a stereotype treat on women's mathematical performances. MacKinnon (2008) compares testing procedures regarding the indirect effect.

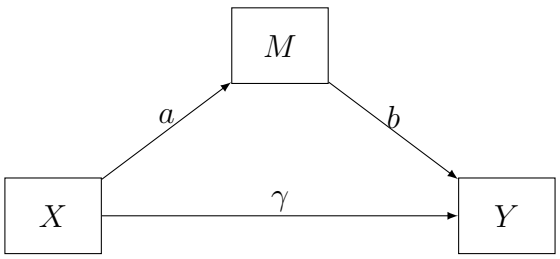


FIGURE 2.1 – Summary of the relations between Y, X, M. The direct and indirect effects are defined by γ and ab respectively, according to MacKinnon (2008)

The main objective in the mediation model is to quantify the added effect of X on Y in presence of M. A natural first step in this direction is to detect the absence of a direct effect altogether, which would signify that X could (and should) be ignored to investigate Y. Detecting the direct effect is generally achieved via a statistical test on the significance of the corresponding coefficient γ in the model. If Y is a continuous variable, the mediation model typically follows a classical linear regression framework :

$$Y = \alpha + \gamma X + bM + \varepsilon,$$

where ϵ is a random error uncorrelated to X and M, with zero mean and finite variance. In this model, testing whether there is a direct effect can be achieved by a Student significance test on the coefficient γ. Similarly, the logistic regression model provides a discrete analogue when Y is a categorical variable. The absence of a direct effect is then tested via the likelihood ratio test also called LR test (see e.g. Agresti, 2006) or via the Wald test

(see Hauck Jr. and Donner, 1977, for example). Other models have been investigated in the literature such as log-linear, Poisson or negative Binomial see for instance VanderWeele (2015).

In some situations, generalized linear models may fail to detect the dependence of the variables. This is true for instance if the conditional expectation function (also called regression function) $\rho : (x, m) \mapsto E(Y|X = x, M = m)$ is non-monotonic with respect to one or more variables. While other parametric models may account for the non-monotonicity, they still rely on structural assumptions that can be hard to check in practice. Purely non-parametric methods thus tend to be more robust in some situations, at the cost of a theoretically lower convergence rate. Non-monotonic behavior appear in many relationships as illustrated by the following examples. Tong et al. (2008) study the relationship between the social attractiveness and the number of Facebook friends. They show that the social attractiveness raises with increasing number of friends, but declines for a large number of friends. Kiviruusu et al. (2015) highlights the existence of a non-linear link between age and self-esteem. The same results are obtained in Erol and Orth (2011) who consider the trajectory of the Big Five personality traits as a function of age.

In Pearl (2001), the average natural direct effect is quantified for any two values x, x^* of X in a way that is compatible with the non-parametric identification for a binary variable X under sequential ignorability seen in Imai and Keele (2010) . Since one side of the data is always missing when investigating the direct effect (the counterfactual data are, by nature, not observed), testing the absence of direct effect is impossible in a general framework. More generally, building tests on the conditional independence is known to be a difficult task, as discussed in Shah and Peters (2018). It is however feasible to test if the conditional expectation given $X = x$ does not depend on x, which we refer to as strong absence of direct effect. This technically stronger condition turns out to be equivalent to the absence of direct effect for all distinct pairs $(x, x^*), x \neq x^*$ in most frameworks studied the literature, including linear models with or without interaction Hayes (2018), generalized linear models VanderWeele (2015), generalized additive models Wood (2006) or multiplicative models. Unlike the natural direct effect, the strong absence of direct effect can be detected from the data in a non-parametric setting.

We present a non-parametric test procedure to infer on the strong absence of a direct effect in the general mediation model. The test statistic are obtained from the Nadaraya-

Watson estimators of Y conditionally to (X, M) and M. Although the theoretical distribution of the test statistic under the null hypothesis is unknown, it is possible to approach it by a bootstrap procedure, thus providing an approximation of the p-value. A real data application to students' performances linked to well-being and self-efficacy is presented. We show that the conclusions regarding the existence of a strong direct effect may differ, whether the considered model is linear (in this case, the logistic regression model) or not. A comparative study of the two tests procedures is carried out on simulated data in both a linear and non-linear framework. This study reveals that the logistic model may misread the causal effect in the data if the linearity assumption is not satisfied, and more particularly in absence of monotonic effect of X on Y. On the contrary, the performances of the non-linear test procedure remain comparable to the parametric tests in the logistic regression setting. We note also that the comparison between both parametric tests is in favor of the LR test in terms of power for small samples, in agreement with the published literature (see e.g. Harrell, 2006) .

The paper is organized as follows. In Section 2.2 we describe the mathematical formalism behind the non-linear mediation model, whose definition relies on the joint distribution of the variables. We show that this model effectively generalizes the linear mediation model. Indeed, a direct effect in a linear scenario results in a direct effect in the general setting, while the reciprocal may not be true. The extension of the significance test for a direct effect to the non-linear setting is then developed. Finally, the statistical hypothesis testing is applied to numerical examples in Section 2.4, both on simulated and real data.

2.2 Strong absence of direct effect

Let Y be a response variable with binary outcome and X, M two continuous variables with M denoting the mediator. We denote by Y_x the potential value of the outcome Y when $X = x$. In a real study for each individual, we have access to only one of the values $Y_x(u)$ or $Y_{x^*}(u)$ depending on whether the individual has been exposed to $X = x$ or $X = x^*$. The causal effect for X between two values x, x^* on the outcome Y for an individual u is defined by $Y_x(u) - Y_{x^*}(u)$. The average causal effect for X on Y is the average over individuals

$$\mathbb{E}\Big(Y_x - Y_{x^*}\Big)$$

In a mediation framework, the direct effect corresponds to the causal effect for X on Y when the mediator is blocked or controlled. In the contrefactual framework, it is possible

to define mathematically this causal effect, let $Y_{x,M_{x^*}}(u)$ denotes the potential value of Y for an individual exposed to $X = x$ and in the same time the potential value of the mediator for this individual if he is exposed to $X = x^*$. For example, consider X the dose of nicotine, M the anxiety and Y the smoking cessation. To quantify the effect for nicotine on smoking cessation, we look for the difference between a dose $X = 0$ and a dose of $X = 1$ considering that all individuals have an anxiety level M corresponding to a nicotine dose of $X = 1$. The average natural direct effect (NDE) is in the contrefactual framework defined by

$$\mathrm{NDE}(x, x^*) = \mathbb{E}(Y_{x,M_{x^*}} - Y_{x^*,M_{x^*}}).$$

To identify NDE, Pearl (2001) suppose that for all (x, x^*, m) :

— $Y_{x,m} \perp\!\!\!\perp X$

— $Y_{x,m} \perp\!\!\!\perp M|X$

— $M_x \perp\!\!\!\perp X$

— $Y_{x,m} \perp\!\!\!\perp M_{x^*}$

and in this case

$$\mathrm{NDE}(x, x^*) = \int \Big(\mathbb{E}(Y|X = x, M = m) - \mathbb{E}(Y|X = x^*, M = m)\Big)\, \mathrm{d}\, F_{M|X=x}(m). \quad (2.1)$$

Throughout the article, we consider that these assumptions hold and that the NDE is defined by equation (2.1). Let ρ denote the conditional expectation function defined for all possible value (x, m) of (X, M) by

$$\rho(x, m) := \mathbb{E}(Y|X = x, M = m). \quad (2.2)$$

Equation (2.1) can therefore be rewritten as follows

$$\mathrm{NDE}(x, x^*) = \mathbb{E}\Big(\rho(x, M) - \rho(x^*, M)\Big|X = x) = \mathbb{E}(Y|X = x) - \mathbb{E}\Big(\rho(x^*, M)\Big|X = x). \quad (2.3)$$

The main difficulty when investigating the average natural direct effect stems from the term $\mathbb{E}\Big(\rho(x^*, M)\Big|X = x)$, corresponding to the theoretical expected value of Y given $X = x^*$, when set in a counterfactual context where $X = x$. By nature, this quantity is unobservable and impossible to infer without further specifications of the model. In fact, even the question of the absence of direct effect $\mathrm{NDE}(x, x^*) = 0$ for all pairs x, x^* (which we shall simply denote by $\mathrm{NDE}(., .) \equiv 0$ further on) depends on inaccessible parameters induced by the counterfactual context.

In this paper, we investigate the absence of direct effect $\mathrm{NDE}(.,.) \equiv 0$ via a stronger condition that can be inferred from the data. Hereafter, we denote by ϕ the conditional expectation of Y given M, that is,

$$\phi(m) = \mathbb{E}(Y|M = m). \tag{2.4}$$

Definition 2.2.1. *We say that there is a strong absence of direct effect if the conditional expectation of Y knowing (X, M) is a function of M only, that is if*

$$\rho(x, m) = \phi(m),$$

for almost every values x, m of (X, M).

From Eq. (2.3), we see that this condition implies the absence of direct effect $\mathrm{NDE}(.,.) \equiv 0$, while being strictly stronger in general. Nevertheless, the two are equivalent in the most prevalent models used in the literature. These include :

1. Linear models Hayes (2018), where the regression function writes $\rho(x, m) = \alpha + bm + \gamma x$ for some real parameters α, b, γ and the natural direct effect $\mathrm{NDE}(x, x^*) = \gamma(x - x^*)$. Thus, the absence of direct effect $\mathrm{NDE}(.,.) \equiv 0$ implies $\gamma = 0$ which in turn implies that $\rho(x, m)$ does not depend on x.
2. Generalized linear models $Y = h(\alpha + bM + \gamma X) + \epsilon$ where the natural direct effect is given by

$$\mathrm{NDE}(x, x^*) = \mathbb{E}\Big(h(\alpha + bM + \gamma x) - h(\alpha + bM + \gamma x^*)\Big).$$

   If the function h is monotonic, the condition $\mathrm{NDE}(x, x^*) = 0$ is actually equivalent to $h(\alpha + bM + \gamma x) - h(\alpha + bM + \gamma x^*) \overset{a.s.}{=} 0$ due to the integrand $m \mapsto h(\alpha + bm + \gamma x) - h(\alpha + bm + \gamma x^*)$ having constant sign. Thus, the absence of direct effect $\mathrm{NDE}(.,.) \equiv 0$ implies the strong absence. Remark that the monotonicity of h is verified is most common generalized linear models such as Logistic, Poisson or Binomial, see e.g. VanderWeele (2015).
3. General Additive Models (GAM) which assumes a regression function of the form $\rho(X, M) = \gamma(X) + b(M)$ for some unknown functions γ, b (see for instance Wood (2006)). In this case, the calculation is straightforward with $\mathrm{NDE}(x, x^*) = \gamma(x) - \gamma(x^*)$. Here again, the absence of direct effect for all (x, x^*) implies the strong absence of direct effect.

4. Multiplicative models $\rho(X, M) = \gamma(X) \times b(M)$ for which

$$\mathrm{NDE}(x, x^*) = \Big(\gamma(x) - \gamma(x^*)\Big)\mathbb{E}(b(M)|X = x).$$

Assuming that $\mathbb{E}(b(M)|X = x)$ is not identically zero, the absence of direct effect is equivalent to the strong absence. These models also encompass for example the linear models with interaction.

2.3 The non-parametric test procedure

Hereafter, we assume that Y is an integrable random variable and that (X, M) has a density on $\mathbb{R}^2$ with respect to Lebesgue measure. We are interested in testing the strong absence of direct effect,

$$(\mathcal{H}_0) : \rho(X, M) \overset{a.s.}{=} \phi(M), \tag{2.5}$$

which boils down to checking if the parameter

$$\theta := \mathbb{E}\Big|\rho(X, M) - \phi(M)\Big|$$

is zero. The test procedure relies on building a consistent estimator $\hat{\theta}$ of θ obtained from non-parametric methods. Precisely, the conditional expectations functions ρ and ϕ defined respectively in (2.2) and (2.4) are estimated by the Nadaraya-Watson method :.

$$\widehat{\rho}(x, m) := \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K_h(X_i - x) K_h(M_i - m)}{\sum_{i=1}^n K_h(X_i - x) K_h(M_i - m)} \quad \text{and} \quad \widehat{\phi}(m) := \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K_h(M_i - m)}{\sum_{i=1}^n K_h(M_i - m)}.$$

In this case, K is a symmetric kernel and $K_h = K(./h)/h$ with $h > 0$ the bandwidth. For simplicity's sake we chose a Gaussian kernel and with theoretically optimal bandwidths ($h = n^{-1/6}$ for $\widehat{\rho}$ and $h = n^{-1/5}$ for $\widehat{\phi}$). This is sufficient to ensure the consistency of the kernel estimators under mild assumptions. As a matter of fact, calibrating the bandwidth adaptively in order to improve the estimation turns out to be unnecessary for our purposes since we are mainly interested in the distribution of the test statistics.

Remark 2.3.1. *The Nadaraya-Watson estimator of the conditional expectation function is built as a weighted average of the response variable Y, where each individual weight measures the proximity of the variable to the value at which the function is evaluated.*

For instance, $\widehat{\phi}$ *verifies* $\widehat{\phi}(m) = \sum_{i=1}^{n} w_i Y_i$ *where* $w_i := K_h(M_i - m)/\sum_{i=1}^{n} K_h(M_i - m)$ *quantifies the closeness between* m *and* M_i*.*

We now compute the empirical estimator :

$$\widehat{\theta} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\widehat{\rho}(X_i, M_i) - \widehat{\phi}(M_i)\right|.$$

If there is no direct effect, the statistic $\widehat{\theta}$ is expected to be close to zero, assuming that the regularity conditions for the consistency of the Nadaraya-Watson method are verified. To build the test for the absence of a direct effect, we investigate the distribution of $\widehat{\theta}$ under the null hypothesis. This problem is not easily tractable analytically, even asymptotically. However with binary outcomes Y we show that it can rely on bootstrap to approximate it. The distribution of $\widehat{\theta}$ is estimated by a bootstrap procedure as follows.

1. We draw B samples $(X_i^{(b)}, M_i^{(b)}), b = 1, ..., B$ of size n with replacement from the original sample $(X_i, M_i), i = 1, ..., n$.
2. For each b, we generate a Bernoulli variable $Y_i^{(b)}$ with probability $\widehat{\phi}\left(M_i^{(b)}\right)$ for $i = 1, ..., n$. This aims to approximate the distribution of Y conditionally to M, X, which only depends on M under the null hypothesis.
3. We compute the statistics $\widehat{\theta}_b$ over all bootstrap samples $b = 1, ..., B$.

Let t denote the observed value of $\widehat{\theta}$ on the observed sample. The p-value of the test is then obtained as the empirical quantile of $\widehat{\theta}_1, ..., \widehat{\theta}_B$, evaluated at t :

$$\text{p-value} = \frac{1}{B}\sum_{b=1}^{B}\mathbb{1}\{\widehat{\theta}_b > t\}.$$

Since the absence of direct effect conveys that $\widehat{\theta}$ must be close to zero, the null hypothesis is rejected at a significance level $\alpha \in (0, 1)$ if p-value $< \alpha$.

Remark 2.3.2. *The bootstrap procedure is effective in this situation because we are able to approximate the distribution of* $Y_i^{(b)}$ *conditionally to* $M_i^{(b)}$ *under the null hypothesis. In the binary case, this is achieved by generating* $Y_i^{(b)}$ *as a Bernoulli random variable with parameter* $\widehat{\phi}\left(M_i^{(b)}\right)$*. This can easily be extended to more than two values by generating* $Y_i^{(b)}$ *as a multinomial distribution with probabilities* $\widehat{\phi}_j\left(M_i^{(b)}\right)$ *estimated for each value* j*. In the continuous case, the bootstrap step requires the approximation of the distribution of the residual term* ϵ *in the non-linear relation* $Y = \phi(M) + \epsilon$*. Both parametric (e.g. normality assumptions) or non-parametric approaches are possible, although they may have a non-negligible impact on the performances of the test.*

2.4 Numerical applications

2.4.1 Students' Self-Efficacy Feeling

To illustrate the non-parametric approach, we investigate the mediation of Students' Well-Being ($X = WB$) in the relation between Self-Efficacy Feeling ($M = SEF$) and Academic Performance in Mathematics and in French ($Y = AP$). This question was studied by Karademas (2006) and Dench and Regan (2000). Here, we focus on the nature of the relationship in this case, by asking if Well-Being always increases the academical performances or if it has a negative effect up to a certain point, due for instance to a too active social life.

Participants This study is part of a research within primary and secondary schools from the Nantes region (France). The sample was made up of 244 students (161 girls and 131 boys, 55 % of girls).The participants were aged between 9 to 14 years ($M = 11.35, SD = 1.42$).

Procedure This research was funded by several grants from France's Ministère de l'Education Nationale et de l'Enseignement Supérieur. An informational letter describing the purpose and the procedure of the research (duration and nature of the tasks) was sent to the family, accompanied with a parental consent. Each child received a questionnaire, containing several scales. The children filled out the questionnaire on their own, in a collective setting.

Measures The teachers evaluate the academic performance in Mathematics and in French as above average ($Y = 1$) or not ($Y = 0$). For French performance, 200 children were evaluated above average, and for Mathematics 211 children.

Well-Being : The well-being was assessed with a 28-item questionnaire scale developed and validated by Guimard et al. (2015). In this scale, the response format were from 1 to 4 (see examples in Table 2.1). Cronbach-α was satisfactory with score .82 [1].

Self-Efficacy Feeling : The Self-Efficacy Feeling is a 11-item questionnaire scale developed and validated in French by It allows to evaluate three dimensions of Self-Efficacy Feeling : broadly (3 items), in mathematics (4 items) and in French (4 items). Children filled out the SEF with a six-point scale (1 : completely untrue to 6 : completely true). Cronbach'α for the two last dimensions were respectively .80 and .84.

1. La définition de cet indice est donnée dans l'annexe B

	really like me	pretty much like me				pretty much like me	really like me
1	☐	☐	Some children find it difficult to make friends at school	**BUT**	Others find it easy to make friends at school	☐	☐
...							
11	☐	☐	Some children find that their teacher help them enough	**BUT**	Others find that their teacher does not help them enough	☐	☐
...							

TABLE 2.1 – Item's example from the Well-being scale

	French				Mathematics			
	WB		SEF		WB		SEF	
AP	0	1	0	1	0	1	0	1
N	81	211	81	211	92	200	92	200
M	2.816	2.943	4.333	4.799	2.781	2.966	4.457	5.164
SD	0.4307	0.3660	1.051	0.9202	0.3726	0.3825	1.088	0.9135
Min	1.429	1.893	1.500	1.250	1.429	1.893	1.500	1.500
Max	4.000	3.929	6.000	6.000	3.786	4.000	6.000	6.000

TABLE 2.2 – Descriptive Statistics for Academic Performances in French and in Mathematics

Results Figure 2.2 and Table 2.2 shows the distributions of the Well-Being (X) and the Self Efficacy Feeling (M) for the groups $Y = 0$ and $Y = 1$ (Y : academic performance in french and Y : academic performance in mathematics). Before modeling the relationship between (X, M, Y), we can focus on the Cohen's d (see Cohen (1988), for details). For academic performance in mathematics, the effect size $d = 0.489$ for Well-Being is less than for Self Efficacy Feeling $d = 0.728$, both are significant. For academic performance in French, the effect size $d = 0.329$ for Well-Being is also less than for Self Efficacy Feeling $d = 0.486$, both are lower than those for mathematics but are anyway significant.

We compare the results of our non-parametric test with both the Wald test and the LR test, which are commonly applied for this kind of psychological studies.

	p_W	p_{LR}	p_{NP}
Mathematics	.074	.073	.075
French	.214	.212	.021

TABLE 2.3 – Comparison of results on the real dataset. The p-values p_W, p_{LR}, p_{NP} refer respectively to the Wald, LR and non-parametric tests.

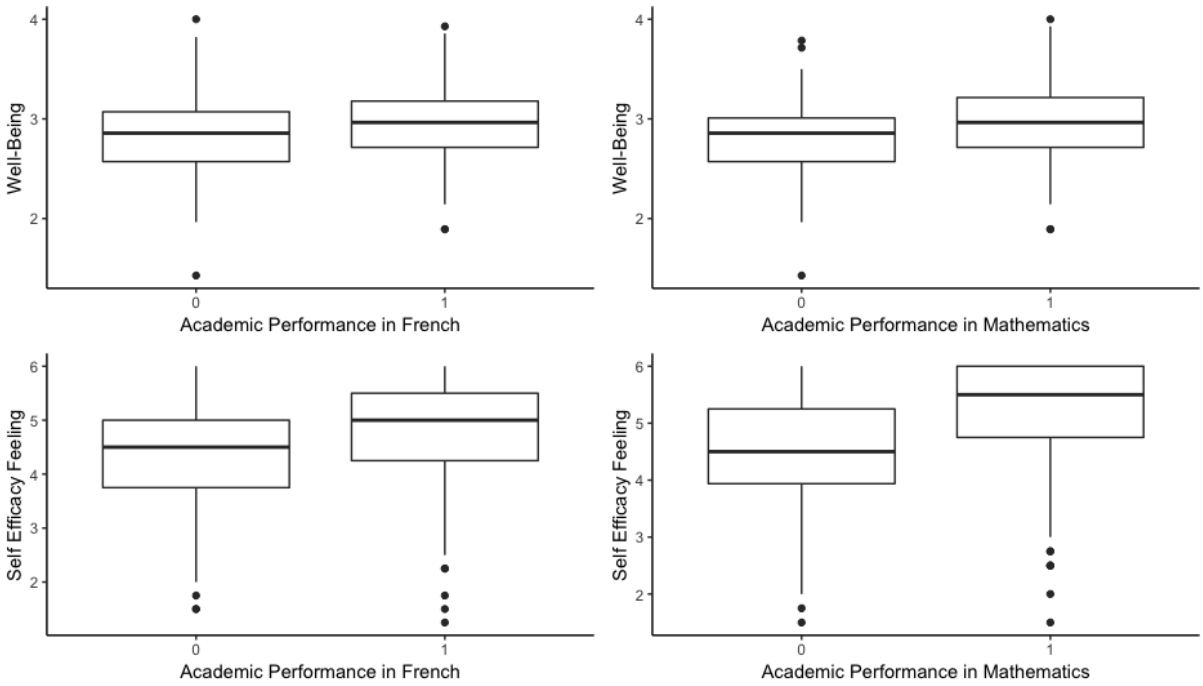


FIGURE 2.2 – Boxplots of the Well-Being and the Self Efficacy Feeling according to the Academic Performance respectively in French and in Mathematics.

The p-values of the parametric and non-parametric tests are similar in mathematics. We may note that the results are contradictory in French, at the typical significance level $\alpha = .05$, where the non-parametric test does detect a direct effect. We argue that the discrepancy in the results is due to the non-monotonic behavior of the response variable in this case. The logistic regression model, which is limited to monotonic relations, fails to detect the effect of the self-efficacy feeling, as we see in Figure 2.3.

In comparison, this phenomenon is not witnessed for Academic performance in mathematics where both methods provide similar estimations, as seen in Figure 2.4. This explains the identical conclusions of the two methods in this case.

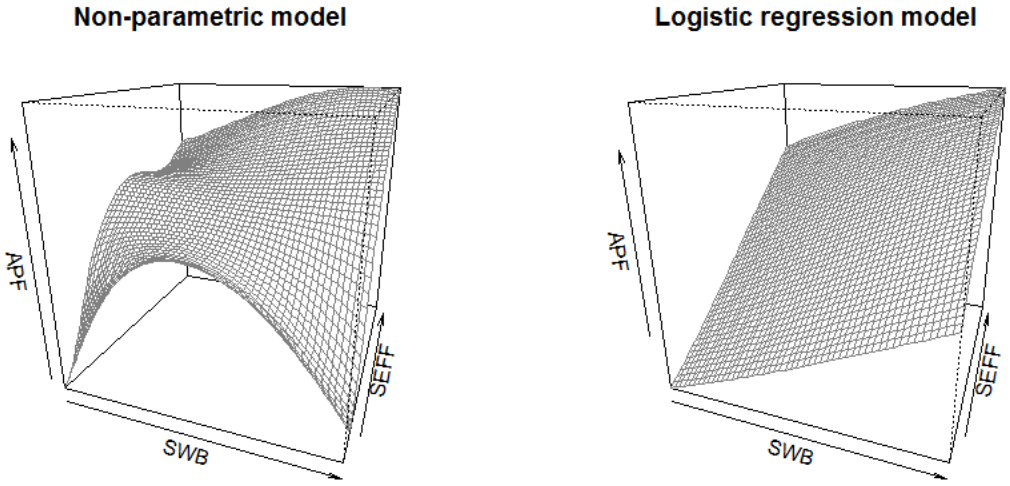


FIGURE 2.3 – Estimation of the expected Academic performance in French, in function of Student Well-Being and Self-Efficacy Feeling by non-parametric regression (left) and logistic regression (right). The latter model is unable to detect the non-monotonic behavior with respect to the SEF variable.

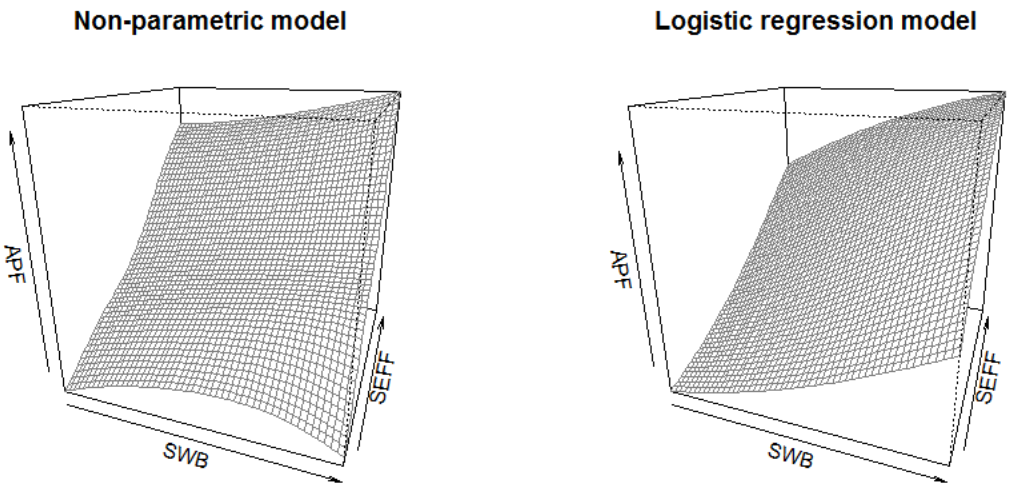


FIGURE 2.4 – Estimation of the expected Academic performance in mathematics, in function of Student Well-Being and Self-Efficacy Feeling by non-parametric regression (left) and logistic regression (right).

2.4.2 Simulated data

We generate data from three distinct models corresponding to three different forms of the conditional probability $\rho_\gamma(x,m) := \mathbb{P}(Y=1|X=x,M=m)$, indexed by a coefficient γ varying from $\gamma=0$ (i.e. no direct effect) to $\gamma=1$ (i.e. only direct effect). For each model, we generate $N=10,000$ samples of sizes $n=20,30,50$ and 100. The observations X_i, M_i are selected randomly from the actual dataset of the previous section, and Y_i follows a Bernoulli distribution with parameter $\rho_\gamma(X_i,M_i)$. The three different scenarios are described below.

1. The first scenario is the logistic regression model with

$$\rho_\gamma(x,m) = \frac{1}{1+\exp\Big(-3+2\gamma x+(1-\gamma)m\Big)}.$$

   This is the theoretical framework of the LR and Wald tests, although both are based on asymptotic approximations.

2. The second scenario is generated from

$$\rho_\gamma(x,m) := \gamma 0.5 \times \mathbb{1}_{x>3} + (1-\gamma)0.25 \times \mathbb{1}_{m>5},$$

   where $\mathbb{1}$ stands for the indicator function. In this case, the relation between Y and X, M is non-linear but monotonic in both x and m, so that it is expected not to deviate too much from the linear framework.

3. For the third model, we take

$$\rho_\gamma(x,m) = \gamma\lfloor -1.72x^2 + 10.36x - 15.14\rfloor_+ + (1-\gamma)0.1m,$$

   where $\lfloor x\rfloor_+ = \max(x,0)$. Due to its non-monotonic behavior in x, this setup is unfavorable for the parametric tests while it is still covered by the non-parametric one. The coefficients of the polynomial function in x are chosen so that $\rho_\gamma(X_i,M_i)$ remains in the interval $[0,1]$ for all possible values of X_i, M_i and γ.

In the three scenarios, we can note that the strong absence of direct effect is equivalent to the absence of effect for all distinct x, x^*. Simulations and computations were performed using R Core Team (2016). For fixing $\alpha = 5\%$ the significance level, Figures 2.5, 2.6, 2.7 show the evolution of the empirical probability to reject the null hypothesis as function of γ. The value $\gamma=0$ corresponds to the empirical significance level and $\gamma>0$ give the simulated power function. All these probabilities are estimated from 10,000 independent

replications.

Table 2.4 displays the simulated probabilities to reject the null hypothesis. The simulated power of the three tests is low for $n = 20$ sample-size and significance levels $\alpha = .01, .05, .10$. Moreover, the NP-test has a better empirical significance level in 75 percent of cases, LR test in 6 percent and Wald test in 19 percent. Lastly, the LR test is not conservative for all $n = 20, 30$ and $\alpha = .01, .05, .10$, leading to reject the null hypothesis with higher probability than α given that the null hypothesis is true.

In the $n = 50, 100$ sample size, in agreement with published literature (see e.g. Agresti, 2006), the Wald and LR test perform similarly in the three examples.

The non monotonic framework highlights the adding value of the non-parametric method. Indeed, for all significance level $\alpha = .01, .05, .10$, the NP test has a high simulated power as soon as $n \geq 30$. In this case, both parametric tests are not appropriate even for large sample sizes (e.g. for $\gamma = 1$ and $\alpha = .05$, the Wald test and the LR test rejects only the null hypothesis respectively 31 percent and 35 percent while the NP-test always rejects the null hypothesis).

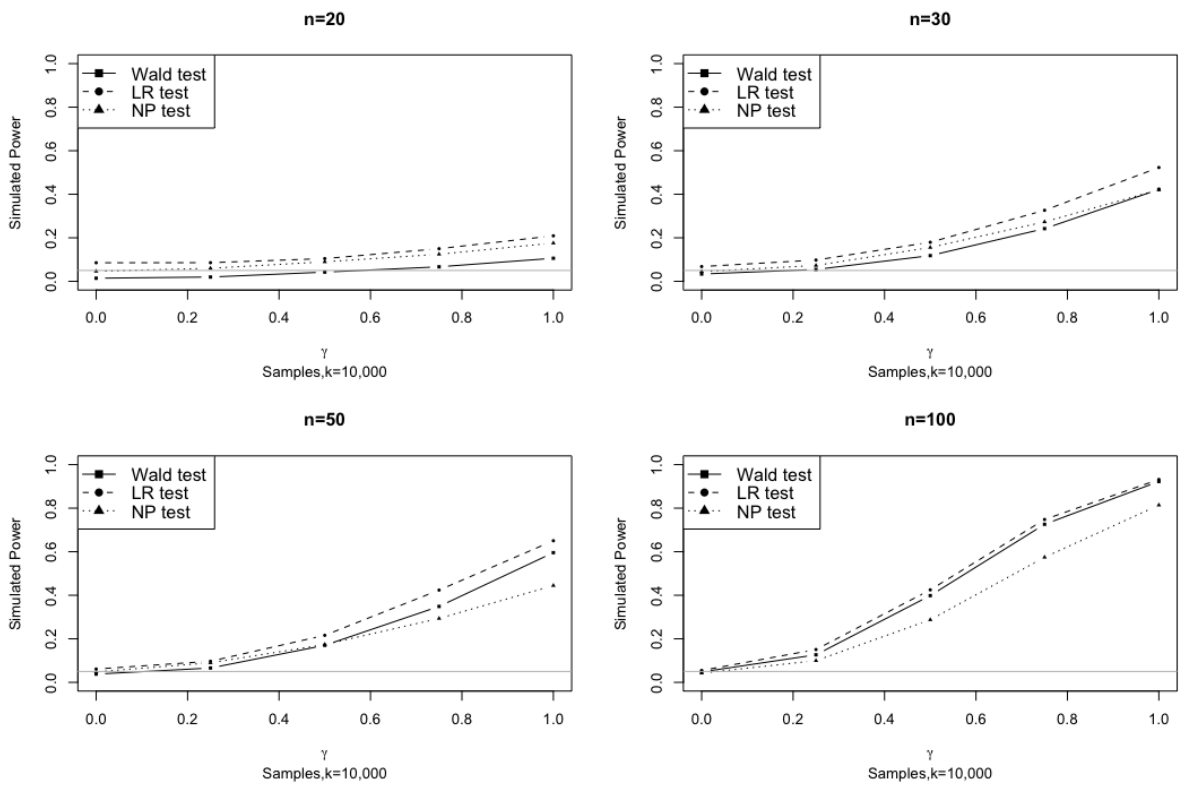


FIGURE 2.5 – Comparison of the empirical level significance ($\gamma = 0$) and of the empirical power ($\gamma > 0$) in the logistic model with significance level $\alpha = .05$. The parametric tests outperforms the non-parametric test in a linear setup, as one would anticipate for large sample size ($n = 50, n = 100$). However, results show that NP-test has a better significance level than the Wald and LR tests for small samples ($n = 20, 30, 50$).

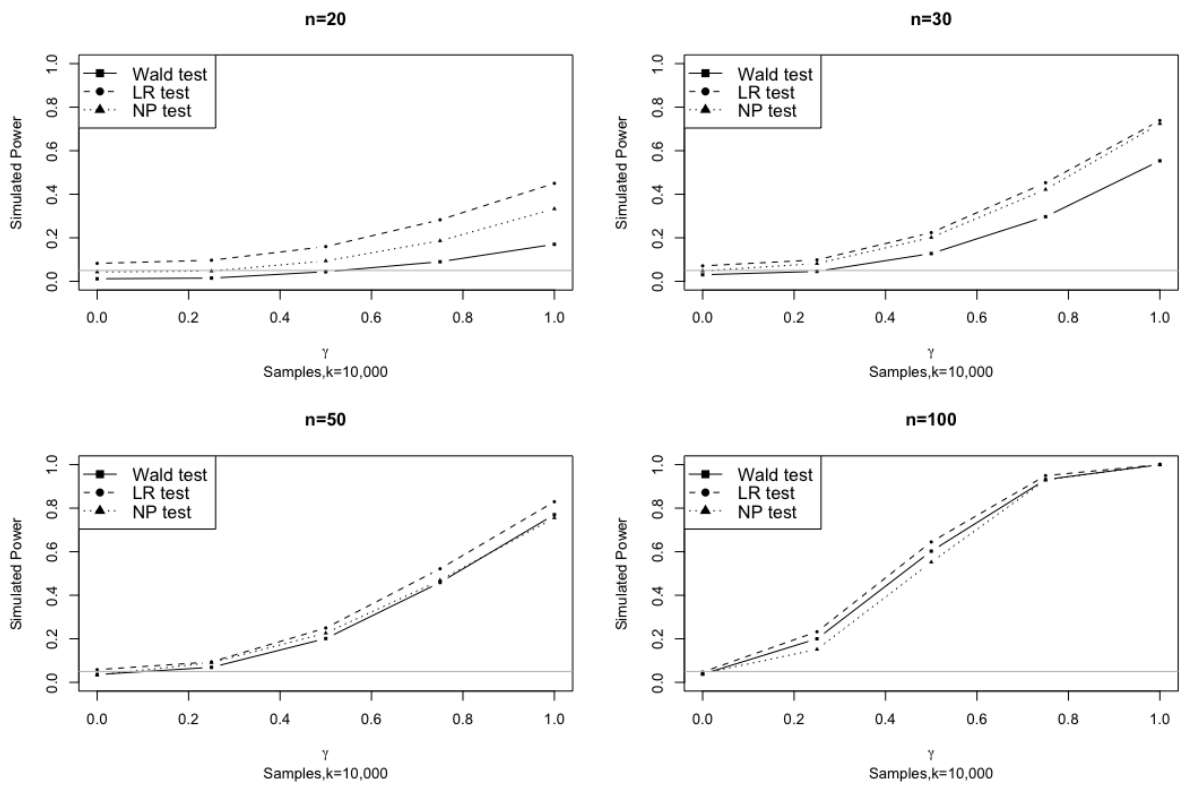


FIGURE 2.6 – Comparison of the empirical level significance and of the empirical power in the non-linear monotonic case with significance level $\alpha = .05$. In the non-linear monotonic case, the power of the tests is similar, as one would anticipate. As in logistic framework, the power of all the LR tests is low for small sample sizes ($n = 20, 30$), but the empirical level significance of the NP-test is better than the others for all $\alpha \in \{.01, .05, .10\}$.

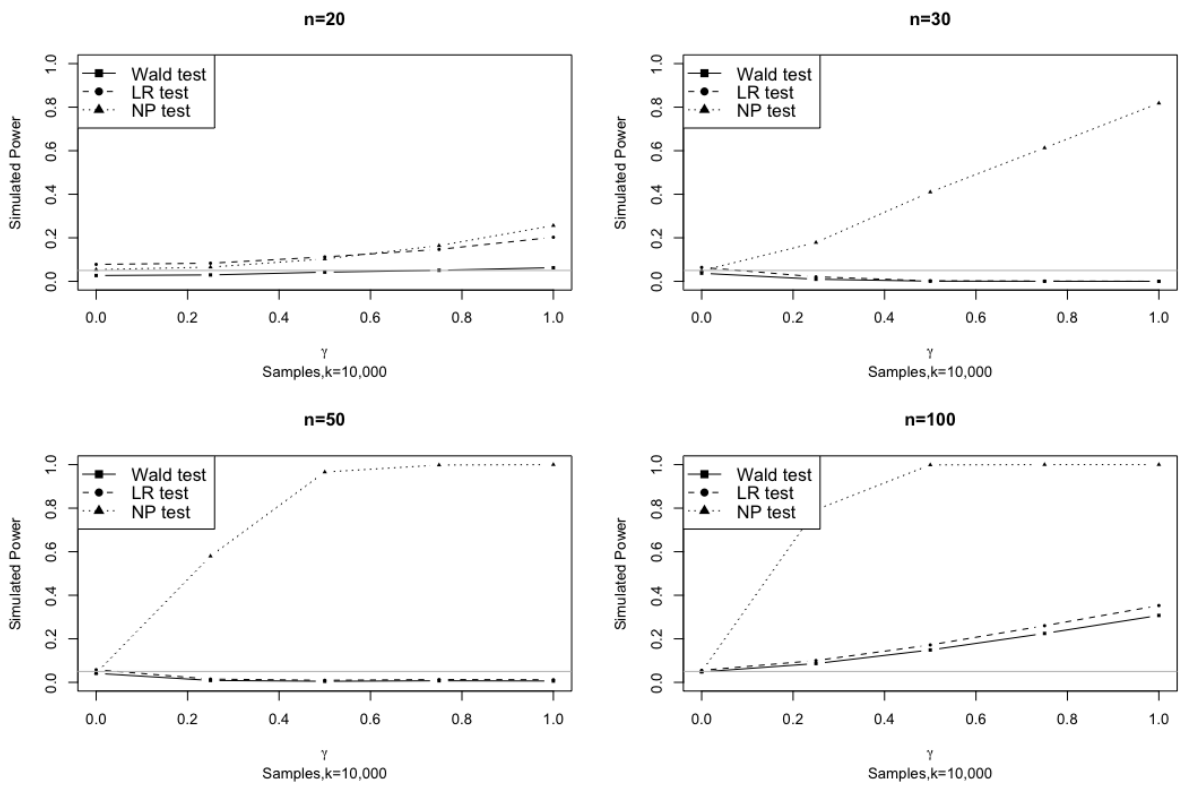


FIGURE 2.7 – Comparison of the empirical level significance and of the empirical power in the non-linear non monotonic case with significance level $\alpha = .05$. The power of the parametric tests is low for all sample size. On the contrary, the power of the NP-test increases with γ. Moreover, the empirical significance level is close to the theoretical value $\alpha = .05$.

	Sample size n	γ	Simulated power								
			$\alpha = .01$			$\alpha = .05$			$\alpha = .10$		
			π_W	π_{LR}	π_{NP}	π_W	π_{LR}	π_{NP}	π_W	π_{LR}	π_{NP}
Logistic	20	0	0.000	0.027	0.003	0.014	0.085	0.046	0.071	0.148	0.124
		0.25	0.000	0.025	0.005	0.020	0.086	0.060	0.089	0.151	0.145
		0.50	0.000	0.032	0.009	0.042	0.104	0.090	0.122	0.180	0.182
		0.75	0.000	0.053	0.017	0.067	0.150	0.125	0.173	0.231	0.233
		1	0.000	0.080	0.027	0.106	0.209	0.176	0.245	0.310	0.312
	30	0	0.000	0.018	0.005	0.034	0.068	0.045	0.092	0.126	0.108
		0.25	0.001	0.029	0.012	0.055	0.098	0.073	0.121	0.164	0.147
		0.50	0.004	0.063	0.031	0.118	0.179	0.156	0.232	0.271	0.269
		0.75	0.016	0.143	0.083	0.242	0.326	0.273	0.401	0.451	0.419
		1	0.053	0.282	0.154	0.422	0.523	0.421	0.591	0.645	0.577
	50	0	0.002	0.016	0.006	0.038	0.061	0.048	0.088	0.119	0.107
		0.25	0.005	0.026	0.013	0.066	0.097	0.090	0.139	0.162	0.176
		0.50	0.024	0.080	0.032	0.170	0.216	0.174	0.288	0.318	0.305
		0.75	0.088	0.205	0.072	0.349	0.424	0.293	0.506	0.553	0.450
		1	0.237	0.399	0.145	0.596	0.650	0.445	0.738	0.764	0.614
	100	0	0.007	0.012	0.006	0.048	0.055	0.042	0.099	0.108	0.095
		0.25	0.028	0.048	0.021	0.127	0.151	0.100	0.215	0.236	0.180
		0.50	0.156	0.206	0.107	0.398	0.425	0.287	0.536	0.549	0.425
		0.75	0.437	0.511	0.301	0.726	0.748	0.575	0.829	0.841	0.703
		1	0.749	0.802	0.581	0.922	0.932	0.814	0.964	0.965	0.888
Monotonic relationship	20	0	0.000	0.025	0.008	0.012	0.083	0.043	0.064	0.143	0.117
		0.25	0.000	0.030	0.006	0.015	0.097	0.047	0.079	0.170	0.135
		0.5	0.000	0.054	0.009	0.044	0.160	0.094	0.150	0.252	0.212
		0.75	0.000	0.107	0.019	0.090	0.282	0.186	0.268	0.406	0.366
		1	0.000	0.197	0.051	0.170	0.450	0.333	0.440	0.606	0.573
	30	0	0.000	0.018	0.004	0.030	0.071	0.048	0.090	0.128	0.115
		0.25	0.000	0.030	0.010	0.046	0.099	0.082	0.119	0.169	0.169
		0.5	0.000	0.088	0.040	0.128	0.224	0.202	0.263	0.329	0.344
		0.75	0.001	0.224	0.126	0.297	0.453	0.422	0.497	0.584	0.600
		1	0.001	0.474	0.315	0.554	0.739	0.724	0.766	0.857	0.876
	50	0	0.002	0.013	0.004	0.036	0.058	0.034	0.088	0.111	0.085
		0.25	0.008	0.028	0.020	0.069	0.094	0.090	0.137	0.159	0.167
		0.5	0.035	0.099	0.066	0.201	0.250	0.226	0.326	0.353	0.352
		0.75	0.131	0.282	0.186	0.459	0.522	0.469	0.614	0.644	0.621
		1	0.356	0.610	0.419	0.770	0.830	0.756	0.885	0.907	0.880
	100	0	0.005	0.010	0.005	0.037	0.047	0.040	0.089	0.100	0.089
		0.25	0.052	0.088	0.034	0.200	0.232	0.152	0.314	0.338	0.263
		0.5	0.302	0.398	0.268	0.602	0.645	0.552	0.731	0.752	0.695
		0.75	0.751	0.829	0.750	0.931	0.950	0.929	0.969	0.974	0.966
		1	0.993	0.997	0.996	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
Non monotonic relationship	20	0	0.000	0.020	0.004	0.027	0.078	0.054	0.090	0.134	0.136
		0.25	0.000	0.025	0.006	0.029	0.083	0.065	0.098	0.144	0.158
		0.5	0.000	0.038	0.011	0.042	0.112	0.103	0.121	0.177	0.218
		0.75	0.000	0.056	0.019	0.051	0.147	0.164	0.149	0.221	0.328
		1	0.000	0.097	0.043	0.063	0.202	0.256	0.183	0.283	0.474
	30	0	0.001	0.014	0.005	0.037	0.064	0.049	0.096	0.122	0.116
		0.25	0.000	0.002	0.013	0.010	0.021	0.178	0.035	0.050	0.374
		0.5	0.000	0.000	0.045	0.001	0.002	0.410	0.007	0.011	0.698
		0.75	0.000	0.000	0.102	0.000	0.001	0.613	0.004	0.006	0.860
		1	0.000	0.000	0.211	0.000	0.000	0.818	0.002	0.003	0.962
	50	0	0.004	0.013	0.004	0.041	0.058	0.042	0.096	0.112	0.105
		0.25	0.000	0.001	0.200	0.009	0.015	0.580	0.029	0.037	0.756
		0.5	0.000	0.001	0.699	0.005	0.009	0.966	0.028	0.036	0.992
		0.75	0.000	0.001	0.950	0.007	0.013	0.998	0.037	0.051	1.000
		1	0.000	0.000	0.999	0.006	0.012	1.000	0.035	0.051	1.000
	100	0	0.007	0.012	0.007	0.048	0.055	0.050	0.095	0.105	0.107
		0.25	0.010	0.019	0.455	0.086	0.100	0.792	0.176	0.191	0.898
		0.5	0.017	0.033	0.965	0.149	0.172	0.999	0.301	0.321	0.999
		0.75	0.027	0.047	1.000	0.225	0.260	1.000	0.419	0.442	1.000
		1	0.039	0.063	1.000	0.307	0.353	1.000	0.555	0.583	1.000

TABLE 2.4 – Summary of the estimated significance levels and powers in the three scenarios.

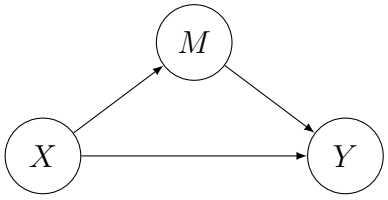
Chapitre 3

Priors Comparison in Bayesian mediation framework with binary outcome

Abstract In human sciences, mediation refers to a causal phenomenon in which the effect of an exposure variable X on an outcome Y can be decomposed into a direct effect and an indirect effect via a third variable M. In mediation models, the natural direct effect and the natural indirect effect are among the parameters of interest. We use a Bayesian framework to estimate these parameters. The aim of this paper is to show that including information into the prior distribution helps to improve the quality of the estimation. The results confirms this fact. One of the usual issue in the mediation analysis is to test the existence of the direct and the indirect effect. Given the estimation of the posterior distribution of the parameters, we construct critical regions for frequentist testing process. We compare by simulations this procedure with the tests used in mediation analysis. Finally, we apply our approach to real data from a longitudinal study on the well-being of children in school.

3.1 Introduction

We are interested in evaluating the causal effect of a so-called exposure variable X on an outcome variable Y (see Pearl et al. (2016) for a general presentation of causality inference). We address this issue in the specific context of mediation analysis (see VanderWeele (2015)). In this case, the effect of the exposition X is subdivided into the direct influencing of X on Y (direct effect) and the influence of X on Y through the mediator variable M (indirect effect) :



This type of model appears in many applications. For instance, in nutrition, Fisher et al. (2000) investigated the effect of duration of breast-feeding X on caloric intake of the toddlers Y mediated by their maternal control of feeding M. In management, Wieder and Ossimitz (2015) studied the direct and indirect effects of Business Intelligence Management X on the quality of managerial decision Y through Data Quality and Information Quality M.

When the outcome Y is continuous, the most widely used model is the linear regression (see MacKinnon (2008); Hayes (2018)), i.e.

$$\begin{aligned} Y &= \beta_0 + \beta M + \gamma X + \varepsilon_2 \\ M &= \alpha_0 + \alpha X + \varepsilon_1 \end{aligned}$$

where $\varepsilon_2 \sim \mathcal{N}(0, \tau^2)$, and $\varepsilon_0 \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$. In this framework, the direct effect is defined by γ, and the indirect effect by $\alpha\beta$. In this case, the indirect effect can be estimated using the product $\alpha\beta$ or using $\psi - \gamma$, where ψ is the total effect of X on Y (i.e. ψ is defined in the linear equation $Y = \psi_0 + \psi X + \varepsilon_3$). Baron and Kenny (1986) proposed a frequentist test for the product $\alpha\beta$ based on the central limit theorem. This is asymptotic procedure based on Delta method. Yuan and MacKinnon (2009) propose Bayesian analysis of mediation effects in Gaussian framework. They address the issue of the estimation of the $\alpha\beta$ product whose posterior distribution can be easily obtained.

The Bayesian analysis of mediation has been addressed in many parametric or non-parametric context for continuous outcomes (see Daniels et al. (2012); Miočević et al. (2018); Elliott et al. (2010); Kim et al. (2017); Park and Kaplan (2015)).

When Y is a binary outcome, the logistic regression is commonly used (see MacKinnon (2008); VanderWeele (2015))

$$\begin{aligned} M &= \alpha_0 + \alpha X + \varepsilon_1 \\ \text{logit}(\mathbb{E}(Y|X, M)) &= \beta_0 + \beta M + \gamma X \end{aligned}$$

In this case, the direct and indirect effects can be defined in various ways : the controlled direct and indirect effects or the natural direct and indirect effects (see Robins and Greenland (1992); Pearl (2001)). In this paper, we focus on the natural direct and indirect effects defined when the exposition X is also binary. These definitions are based on the concepts of potential outcomes and contrefactual variables. The Section 3.2 gives a brief introduction to this approach in order to precisely define these effects. Imai et al. (2010b) propose a quasi-bayesian estimation of these effets for the same model (see also Tingley et al. (2014)). A such approach does not require the definition of the prior distribution. Indeed, the inference is based on the asymptotic posterior distribution whose parameters depend only on the maximum likelihood estimate. Our aim is to propose Bayesian approach where the choice of the prior distribution really contribues to the inference. We propose strategies with different degrees of information :

— an informative prior resulting from Launay et al. (2015),

— a weakly informative prior introduced by Gelman et al. (2007) for the logistic regression,

— a noninformative G-prior introducted by Zellner (1971).

Section 3.3 gives description of the Bayesian model and the methodology to construct estimations of the natural direct and indirect effects. In Section 3.4, we describe the different prior distributions. In Section 3.5, the simulations show that the informative approach based on historical informations make it possible to increase the quality of the estimate : reduction of the statistical bias and variability of the estimators. Nuijten et al. (2015) propose a Bayesian hypothesis testing for the indirect effect. They adopt the point of view of model selection, the decision rule is based on the Bayes factor. A weakness of this approach is the interpretation of the Bayes factor on the evidence categories scale (Jeffreys (1961)) which is not necessary well suited to the mediation model. Alternative scales have been proposed (see for example Kass and Raftery (1995)), but a choice of scale remains difficult to define. In Section 3.6 we propose a frequentist testing procedure on the existence of the effects. Our test statistic is deduced from our Bayesian inference by relying on the asymptotic properties of regions of credibility. A numerical comparaison is done

with the usual tests on the coefficient γ and the product $\alpha\beta$ in mediation analysis. Finally, Section 3.7 is devoted to an application of our methodology. We study schoolchildren's well-being based on dataset from a survey conducted in French schools.

3.2 Brief introduction of Causal Mediation analysis

The first references concerning the potential outcome are present in the experimental design of Fisher (1935) and Neyman (1935). The statistician Rubin (1974) is the first to propose a counterfactual causal model in which for the same individual there are several hypothetical results (the potential results), which are a function of the individual's exposure. The main difficulty lies in the impossibility of observing the counterfactual. This work was extended by Robins and Greenland (1992); Pearl (2001).) To investigate the causal effect of the exposition X we must have for each individual of the population the value of the outcome denoted by Y_1 if he was treated and the outcome denoted by Y_0 if he was not treated. In practice, it is obvious that it is not possible for an individual to have access to these two values. The two fictitious random variables are named the potential outcomes and denoted by $Y_x, \quad x = 0, 1$. The causal effect of X on Y is defined from : $\psi = Y_1 - Y_0$. This quantity must be considered in the population, the causal effet of X on Y is the expected value of the random variable ψ

$$\overline{\psi} = \mathbb{E}(Y_1 - Y_0) \tag{3.1}$$

The variable Y_0, Y_1 are not observable but must be identifiable. We suppose that, if $X = x$:

$$Y_x = Y$$
$$Y_x \perp\!\!\!\perp X$$

then $\overline{\psi}$ can be rewritten

$$\overline{\psi} = \mathbb{E}(Y|X = 1) - \mathbb{E}(Y|X = 0)$$

Remark 3.2.1. *The assumption $Y_x = Y$, called consistency hypothesis, means that for an individual who is exposed ($X = 1$) the observed variable Y is equal to the potential variable Y_1. The assumption $Y_x \perp\!\!\!\perp X$, called ignorability assumption, means that for an individual who is exposed ($X = 1$) the potential variable Y_1 is independent of its true*

exposure variable X.

In a mediation model, the causal effect (3.1) of X on Y in the presence of a mediator M can be broken down into the natural direct effect (NDE) and the natural indirect effect (NIE). The natural direct effect represents the difference in the potential values of the outcome between exposed and not exposed when M is "blocked". Reciprocally, for the natural indirect effect the treatment is "blocked" and we investigate the difference between the potential values of Y corresponding to M_1 and M_0. More specificaly, the natural direct and indirect effects are respectively defined by :

$$\begin{aligned} \mathrm{NDE}(x) &= \mathbb{E}(Y_{1,M_x} - Y_{0,M_x}) \\ \mathrm{NIE}(x) &= \mathbb{E}(Y_{x,M_1} - Y_{x,M_0}) \qquad x \in \{0,1\} \end{aligned}$$

where, $Y_{x,M_{x'}}$ indicates the potential value of Y if the individual has been exposed to $X = x$ while his mediator M is fixed at the potential value he would have had if $X = x'$. Indeed, under the following consistency assumptions (see Robins and Greenland, 1992, for instance) for instance :

C1 : $M_{x'} = m \implies Y_{x,M_{x'}} = Y_{x,m}$

C2 : $X = x$ and $M = m \implies Y = Y_{x,m}$

C3 : $X = x' \implies M = M_{x'}$

The causal effect defined in (3.1) can be rewritten of the form, for all $x \in \{0,1\}$

$$\bar{\psi} = \mathrm{NDE}(x) + \mathrm{NIE}(1-x)$$

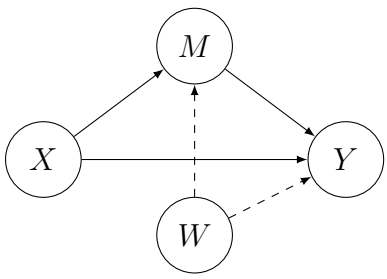


FIGURE 3.1 – Mediation model

In many applications, the exposure variable X admits covariate W. Hereafter, we denote by $n_W = \dim W$ the number of covariates. Figure 3.1 describes the mediation

model in this case. To identify $\mathrm{NDE}(x), \mathrm{NIE}(x)$ we have to add ignorability assumptions : for all (x, x', m) :

I1 : $Y_{x,m} \perp\!\!\!\perp X|W$

I2 : $Y_{x,m} \perp\!\!\!\perp M|(X, W)$

I3 : $M_x \perp\!\!\!\perp X|W$

I4 : $Y_{x,m} \perp\!\!\!\perp M_{x'}|W$

Note that the consistency assumptions are unchanged.

Proposition 3.2.2. *Under assumptions* (C1)-(C3) *and* (4.8)-(I4)*, the natural direct and indirect effects* $\mathrm{NDE}(x), \mathrm{NIE}(x)$ *admit the following representation for all* $x \in \{0, 1\}$.

$$\mathrm{NDE}(x) = \iint \Big[\mathbb{E}(Y|X = 1, M = m, W = w) - \mathbb{E}(Y|X = 0, M = m, W = w) \\ \mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M|X=x,W=w}(m)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_W(w) \tag{3.2}$$

$$\mathrm{NIE}(x) = \iint \mathbb{E}(Y|X = x, M = m, W = w)\left[\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M|X=1,W=w}(m) - \mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M|X=0,W=w}(m)\right] \\ \mathrm{d}\,\mathbb{P}_W(w) \tag{3.3}$$

where $\mathbb{P}_{M|X=x,W=w}$ *denotes the conditional distribution of* M *given* $X = x, W = w$ *and where* $\mathbb{P}_W$ *denotes the distribution of* W.

Démonstration. The proof is relegated in Appendix. Similar result is given by Imai et al. (2010b) under an other set of causality assumptions. Note that several versions of sequential ignorability exist in the literature (for instance Pearl (2001), Robins (2003), Petersen et al. (2006)), but we do not discuss this choice. □

3.3 Bayesian inference of effects

We propose a Bayesian estimation of direct and indirect effects $\mathrm{NDE}(x), \mathrm{NIE}(x)$ in a parametric framework. The variables in our model are (X, M, Y, W). We assume that Y is a binary outcome satisfying logistic regression model with three predictors :

— the exposition variable $X \in \{0, 1\}$,

— the mediator variable $M \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}$,

— the covariates $W \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^p$.

We have

$$\mathbb{P}(Y=1|X,M)=\mathbb{E}(Y|X,M) \quad = \quad \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta M+\gamma X+\eta_2 W)}} \tag{3.4}$$

where $\theta_Y := (\beta_0, \beta, \gamma, \eta_2)$ are unknown parameters.

A linear regression model relates the mediator M to the exposition X and the covariate W :

$$M \quad = \quad \alpha_0 + \alpha X + \eta_1 W + \varepsilon \tag{3.5}$$

where ε is assumed gaussian with 0 mean and unknown variance σ^2 and $\theta_M := (\alpha_0, \alpha_1, \eta_1)$ are unknown parameters.

We assume that the covariate W is an unknown variable whose the distribution belongs to a parametric family $\{f_{\theta_W},\ \theta_W \in \Theta_W\}$. We observe a sample of N independent copies of (X, M, Y, W) denoted by $\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}$, $\underline{M} = \begin{pmatrix} M_1 \\ \vdots \\ M_N \end{pmatrix}$, $\underline{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{pmatrix}$ and $\underline{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_N \end{pmatrix}$.

According to our model choice, the likelihood is

$$\mathcal{L}_\theta(\underline{X}, \underline{M}, \underline{Y}, \underline{W}) = \prod_{i=1}^{N} \frac{e^{-(1-Y_i)(\beta_0+\beta M_i+\gamma X_i+\eta_2 W_i)}}{1+e^{-(\beta_0+\beta M_i+\gamma X_i+\eta_2 W_i)}} \times \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(M_i-\alpha_0-\alpha X_i-\eta_1 W_i)^2} f_{\theta_W}(W_i).$$

where $\theta := (\theta_Y, \theta_M, \sigma^2, \theta_W)$.

To complete the definition of Bayesian model, we have to choose the prior distribution on the parameter θ denoted by π. The choice of priors is discussed in Section 3.4 where we show the interest to consider prior information. We propose in particular an informative prior derived from the approach of Launay et al. (2015). The information required to construct this prior distribution may come from previous measures on the same population (e.g. longitudinal study) or from an independent study done under the same conditions.

$$\pi(\theta_Y, \theta_M, \sigma^2, \theta_W|\underline{X}, \underline{M}, \underline{Y}, \underline{W}) \propto \mathcal{L}_\theta(\underline{X}, \underline{M}, \underline{Y}, \underline{W})\pi(\theta_Y, \theta_M, \sigma^2, \theta_W). \tag{3.6}$$

Our parameters of interest are direct and indirect effects. In the particular case of our

parametric model, (3.2) and (3.3) can be rewritten of the form

$$\mathrm{NDE}_\theta(x) = \iint g_\theta(x, m, w)\,\mathrm{d}\,m\,\mathrm{d}\,w \tag{3.7a}$$

$$\mathrm{NIE}_\theta(x) = \iint h_\theta(x, m, w)\,\mathrm{d}\,m\,\mathrm{d}\,w \tag{3.7b}$$

where

$$\begin{aligned} g_\theta(x,m,w) =& \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\gamma+\beta m+\eta_2 w)}} - \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta m+\eta_2 w)}}\right] e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(m-\alpha_0-\alpha x-\eta_1 w)^2} f_{\theta_W}(w) \\ h_\theta(x,w) =& \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\gamma x+\beta m+\eta_2 w)}}\left[e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(m-\alpha_0-\alpha-\eta_1 w)^2} - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(m-\alpha_0-\eta_1 w)^2}\right] f_{\theta_W}(w) \end{aligned}$$

As $\mathrm{NDE}_\theta(x), \mathrm{NIE}_\theta(x)$ are some functions of θ their posterior distribution can be deduced from (3.6) by a change of variables. However, the posterior distribution is not explicit due to the form of the transformation between θ and $\mathrm{NDE}_\theta(x), \mathrm{NIE}_\theta(x)$, but it can be approximated using Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method.

Indeed,we use Hamiltonian algorithm [1] to generate Markov chain $(\theta^b)_{1\le b\le B}$ with stationary distribution (3.6). Then, we deduce a MCMC sample from the posterior distribution of both parameters of interest $\mathrm{NDE}(x)$ and $\mathrm{NIE}(x)$ by calculating $\mathrm{NDE}_{\theta^b}(x)$ as defined in (3.7a) (respectively $\mathrm{NIE}_{\theta^b}(x)$) for all $b \in \{1, \dots, B\}$.

Remark 3.3.1. *We use numerical integration in* (3.7a), (3.7b). *Monte Carlo integration can be easily implemented and will be particularly useful if the dimension of W is large. Indeed, for each θ^b we approximate* $\mathrm{NDE}_{\theta^b}(x)$ *as follows*

1. `for` $t \in \{1, \dots, T\}$,
   (a) `generate` $\tilde{W}_t$ `from` $f_{\theta^b_W}$,
   (b) `generate` $\tilde{M}_t$ `from Gaussian distribution,`

$$\tilde{M}_t \sim \mathcal{N}(\alpha_0^b + \alpha^b x + \eta_1^b \tilde{W}_t, (\sigma^b)^2).$$

2. `calculate the approximation`

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \frac{1}{1+e^{-(\beta_0^b+\gamma^b+\beta^b\tilde{M}_t+\eta_2^b\tilde{W}_t)}} - \frac{1}{1+e^{-(\beta_0^b+\beta^b\tilde{M}_t+\eta_2^b\tilde{W}_t)}}$$

Similarly we can approximate NIE_{θ^b}.

1. Thanks to Stan application (R Core Team (2017); Stan Development Team (2018a)) this algorithm can be easily implemented.

Remark 3.3.2. *In the* `mediate` *function, the integral with respect to W is approximated using the empirical measure of $\underline{W}$ since Imai et al. (2010b) do not consider parametric assumption on W distribution. In this case the approximation of* $\mathrm{NDE}(x)$ *becomes*

$$\frac{1}{NT}\sum_{n=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\frac{1}{1+e^{-(\beta_0^b+\gamma^b+\beta^b\tilde{M}_{t,n}+\eta_2^b W_n)}}-\frac{1}{1+e^{-(\beta_0^b+\beta^b\tilde{M}_{t,n}+\eta_2^b W_n)}}$$

where $\tilde{M}_{t,n}\sim\mathcal{N}(\alpha_0^b+\alpha^b x+\eta_1^b W_n,(\sigma^b)^2)$. The number N of observations appears in this approximation. This is a drawback because it impacts the quality of the approximation.

3.4 Prior distribution choice

For linear regression models, in absence of information, the $G-$priors are commonly used (see Zellner (1971) for Gaussian model and Marin and Robert (2014) for logistic regression). For the logistic regression (3.4), Gelman et al. (2007) proposed a weakly informative prior. We adapt the two approaches in the context of mediation for parameters (θ_M,θ_Y). Moreover, we propose informative priors on $(\theta_M,\theta_Y,\theta_W)$, following the approach proposed in Launay et al. (2015). Table 3.1 summarizes the different strategies to construct the prior distributions of $\theta_W,\theta_M,\theta_Y,\sigma^2$.

<table>
<tr><th>model</th><th>type</th><th>σ^2</th><th>θ_W</th><th>θ_M</th><th>θ_Y</th></tr>
<tr><td>M1</td><td>informative</td><td rowspan="3">Lebesgue measure on $\mathbb{R}^+$</td><td rowspan="3">π_W</td><td colspan="2">Launay et al. (2015)</td></tr>
<tr><td>M2</td><td>weakly informative</td><td rowspan="2">G-prior</td><td>Gelman et al. (2007)</td></tr>
<tr><td>M3</td><td>non informative</td><td>$G-$prior</td></tr>
</table>

Table 3.1 – Summary of the choice for the prior distribution of $(\theta_M,\theta_Y,\sigma^2)$ in the competitive models. The choice of prior distribution π_W depends on the type of covariates and the information available on them.

Prior distribution for variance σ^2 : For all models, the prior for the variance σ^2 in (3.5) is the Lebesgue measure on $\mathbb{R}^+$. This improper prior is acceptable since it leads to proper posterior for the parameters of the model (see Gelman (2006) for discussion on this choice).

Description of the informative prior choice Launay et al. (2015) : The prior distribution of $(\theta_W,\theta_M,\theta_Y)$ is based on historical informations. We suppose that we have access to a historical dataset whose characteristics are assumed to be similar to ours.

Longitudinal studies are well adapted to this context if we assume that the variations of the population are limited between two measurement times. In this case, the historical dataset corresponds to the data of the time step preceding the one to be modeled. Moreover, we assume that this dataset has been studied by a Bayesian model, and so we can calculate the mean m and the variance V of the posterior distribution of $(\theta_W, \theta_M, \theta_Y)$ on this historical dataset

$$\begin{aligned} m &= \mathbb{E}\left(\theta_W, \theta_M, \theta_Y | historical\ data\right) \\ V &= \mathbb{V}ar\left(\theta_W, \theta_M, \theta_Y | historical\ data\right) \end{aligned}$$

For this historical sample we choose the prior distribution described in Model M3. Assuming that both samples come from similar studies, we take as prior distribution on $\theta_W, \theta_M, \theta_Y$ the distribution defined conditionaly to k by :

$$(\theta_W, \theta_M, \theta_Y) \sim \mathcal{N}_J(\mu, V), \qquad J := n_W + 2$$

where

$$\mu = \begin{pmatrix} k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_J \end{pmatrix} m$$

and where $k_1, ..., k_J$ are i.i.d. from Gaussian distribution $k_j \sim \mathcal{N}(1, \tau^2)$, with τ^2 fixed (large enough to be weakly informative). The hyper-parameters $k_1, ..., k_J$ allow that the parameter $(\theta_W, \theta_M, \theta_Y)$ varies slightly between the two studies. As for the structure of dependence between the variables, we impose a priori that it is unchanged. For example, if a first study shows that the Business Intelligence Management has a positive effect on the quality of managerial decision, we can expect that this effect will also be positive in a futur study. What may change from one study to another is the importance of the relationship between these two variables. In a longitudinal study, we are interested by the evolution of the characteristics of the participants. These characteristics should evolve over time, but not their correlations.

Remark : In Launay et al. (2015), the hierarchical model is more complex, in particular, a scale parameter is added to consider the historical sample is very large compared to the one of interest. In this model, V is replaced by λV, where λ is a positive unknown parameter. This parameter λ plays an important role in terms of robustness if the historical

information is not relevant.

Description of $G-$priors for mediation model : Zellner (1971) introducted $G-$prior for multiple regression models. This prior has been extended to generalized linear regression models (see Marin and Robert, 2014). For all these models, $G-$prior is well defined since the explanatory variables are assumed deterministic. This condition is not satisfied by the mediation model. However, we show that we can adapt this prior to estimate the parameters in (3.4) and (3.5). The main idea is to write the joint probability distribution of $(X, M, Y, W, \theta_M, \theta_Y, \theta_W, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} p(X, M, Y, W, \theta_M, \theta_Y, \theta_W, \sigma^2) &= p(Y|\theta_Y, M, W, X)p(\theta_Y|M, X, W) \times \\ &\quad p(M|\theta_M, X, W, \sigma^2)p(\theta_M|X, W, \sigma^2)p(\sigma^2) \times \\ &\quad p(W|\theta_W)p(\theta_W). \end{aligned} \tag{3.8}$$

This decomposition corresponds to the dependance structure given by the Directed Acyclic Graph (DAG) in Figure 3.2.

— The probability distributions $p(Y|\theta_Y, M, W, X)$ and $p(M|\theta_M, X, W, \sigma^2)$ are defined by (3.4) and (3.5) respectively.

— $p(\theta_M|X, W, \sigma^2)$ is the probability distribution of the G-prior for multiple linear regression. This is a multivariate Gaussian distribution

$$\theta_M|X, W, \sigma^2 \sim \mathcal{N}_{2+n_W}(0_{2+n_W}, g_0\sigma^2(\phi_M'\phi_M)^{-1})$$

where ϕ_M the $N \times (2 + n_W)$ matrix defined by $\phi_M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & w_N \end{pmatrix}$.

— $p(\theta_Y|X, M, W)$ is the probability distribution of the G-prior for logistic regression.

$$\theta_Y|X, M, W \sim \mathcal{N}_{3+n_W}(b_1, g_1N^2(\phi_Y'\phi_Y)^{-1})$$

where ϕ_Y the $N \times (3 + n_W)$ matrix : $\phi_Y = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & m_1 & w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_N & m_N & w_N \end{pmatrix}$.

— $p(W|\theta_W) = f_{\theta_W}$ with the notation in Section 3.3. The choice of prior distribution $p(\theta_W)$ depends on the type of covariates and the information available on them.

Remark 3.4.1. *According to Marin and Robert (2014), we fix the hyper-parameters in the $G-$priors as follows. We set $g_0 = N$ to ensure that the prior has the same weight as one observation of the sample . The choice $b_1 = 0_{2+n_W}$ and $g_1 = 4$ ensures that θ_Y has a flat prior distribution.*

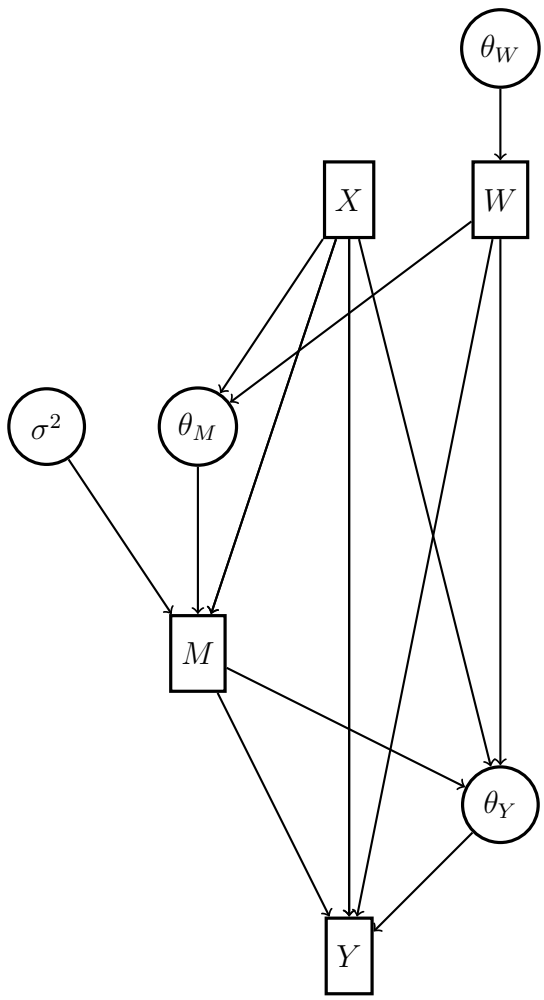


FIGURE 3.2 – DAG for the mediation model

Remark 3.4.2. *Hanson et al. (2014) introduced informative $G-$priors for logistic regression where the hyperparameter b_1, g_1 is estimated from historical dataset. The construction is restricted to Gaussian design matrix i.e.* $\begin{pmatrix} x_1 & m_1 & w_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N & m_N & w_N \end{pmatrix}$ *has a multivariate normal distribution. When X is a binary variable, the same strategy can not be applied to bring prior information. In this case an explicit form of b_1, g_1 is not available.*

Gelman et al. (2007) propose a weakly informative prior for the parameter of logistic regression. This prior can be chosen for $p(\theta_Y|X, M, W)$ in (3.8) instead of the $G-$prior. This prior is build as follows. Firstly, Gelman et al. (2007) (see also Gelman, 2008) standardize the input variables X, M, W. The binary inputs X in the logistic regression are centered

$$\widetilde{X} = X - \bar{X}.$$

The continuous inputs M are centered and scaled to have a standard deviation of 0.5

$$\widetilde{M} = \frac{M - \bar{M}}{2s_M}.$$

A standard deviation of 0.5 for $\widetilde{M}$ gives it a same scale than a symmetric binary input. After this renormalization, we can give a default prior on the logistic coefficients independently of the scale of the input variables. Depending of the type of W, we use one of the two previous variable changes and denotes by $\tilde{W}$ the resulting variable. Let $\widetilde{\theta}_Y = (\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}, \eta_2)$ defined by : $\text{logit}(\mathbb{E}(Y|\widetilde{X}, \widetilde{M}, \widetilde{W})) = \widetilde{\beta}_0 + \widetilde{\beta}\widetilde{M} + \widetilde{\gamma}\widetilde{X} + \widetilde{\eta}_2\widetilde{W}$. The relation between $\widetilde{\theta}_Y$ and θ_Y is given by

$$\gamma = \widetilde{\gamma} \tag{3.9a}$$

$$\beta = \frac{\widetilde{\beta}}{2\ s_M} \tag{3.9b}$$

$$\eta_2 = \frac{\widetilde{\eta}_2}{2\ s_M}\ or\ \eta_2 = \widetilde{\eta}_2 \tag{3.9c}$$

$$\beta_0 = \widetilde{\beta}_0 - \gamma\overline{X} - \beta\overline{M} - \eta_2\overline{W} \tag{3.9d}$$

Secondly, they take Cauchy prior distributions on the parameter $\widetilde{\theta}_Y$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\beta}_0 &\sim \mathcal{C}(0, 10) \\
\widetilde{\beta} &\sim \mathcal{C}(0, 2.5) \\
\widetilde{\gamma} &\sim \mathcal{C}(0, 2.5) \\
\widetilde{\eta}_2 &\sim \mathcal{C}(0, 2.5)
\end{aligned}$$

where $\mathcal{C}(m, \tau)$ denotes the Cauchy distribution with m the location parameter and τ the scale parameter. As with the $G-$prior, the prior distribution of θ_Y depends on the input variables. In the mediation context, this distribution is identified as $p(\theta_Y|X, M, W)$ according to (3.8).

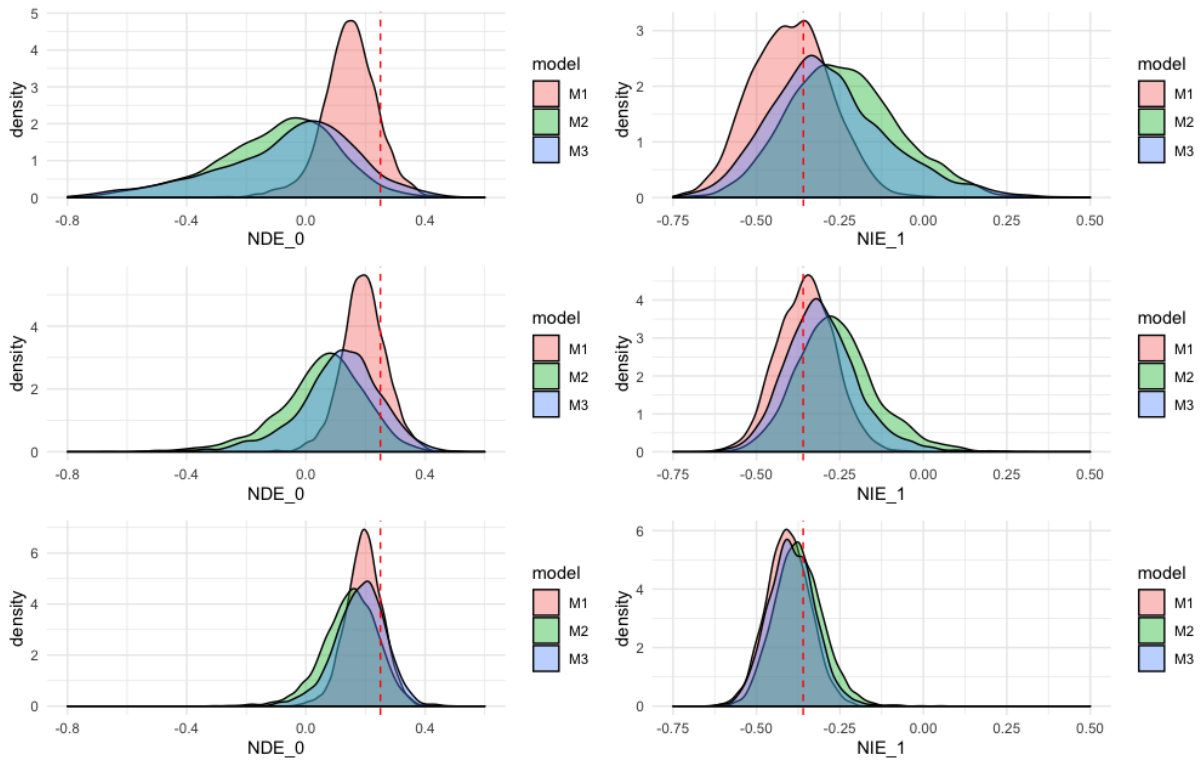


FIGURE 3.3 – Example of estimated posterior distribution of $\mathrm{NDE}_\theta(0)$, $\mathrm{NIE}_\theta(1)$ in the simulation (CASE 1) with $N = \{50, 100, 150\}$ (respectively at the top, middle and bottom of the figure). The vertical line corresponds to the true values.

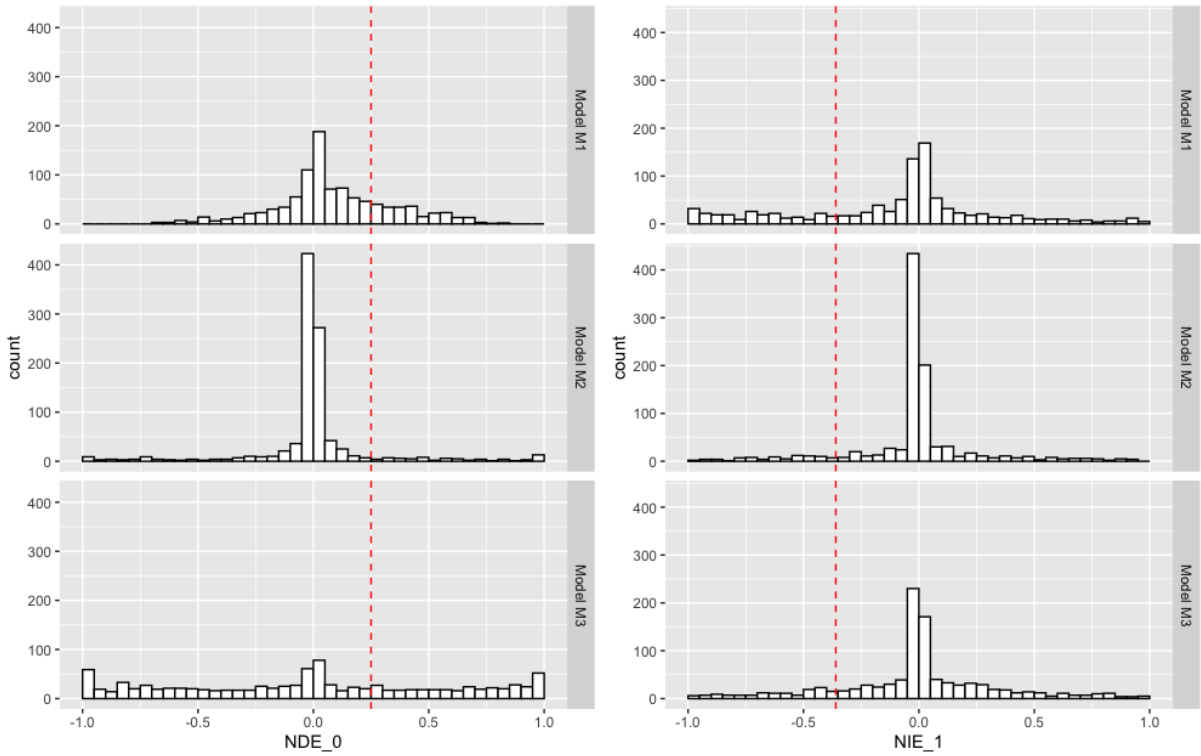


FIGURE 3.4 – Histogram of the prior distributions of $\mathrm{NDE}_\theta(0)$ (left side), $\mathrm{NIE}_\theta(1)$ (right side) corresponding to the posterior distributions shown in 3.3 for the three models. The red dashed vertical line corresponds to the true values.

The three compared models are summarized in the table 3.1. We illustrate through some simulations that the interest of including information in the construction of the prior distribution. We evaluate the impact of the prior using frequentist criteria.

3.5 Numerical results :

It can be expected that incorporating correct information in the prior distribution will improve the quality of the estimates. But we also want to see if providing false information deteriorates the estimates. The results show that in this case we do not do worse than the non informative prior choice. Moreover, the adaptation of the G-priors has the best performances among the non informative priors.

TABLE 3.2 – The true values of the parameters in the three cases.

	θ_M	θ_Y	NDE(0)	NIE(1)
case 1	$(1, -2)$	$(-0.5, 1, 1.5)$	0.250	-0.359
case 2	$1.1 \times (1, -2)$	$1.1 \times (-0.5, 1, 1.5)$	0.247	-0.411
case 3	$(1, -3)$	$(-1, 0.75, 2)$	0.396	-0.453
historical	$(0.99, -2.05)$	$(-0.12, 1.30, 1.06)$	0.187	-0.368

Criteria for evaluating and comparing estimators To compare the three prior distributions presented previously, we evaluate the accuracy of Bayes estimates of NDE(0) and NIE(1) using frequentist criteria. From Monte Carlo experiments, we calculate the bias, the root of mean square error (RMSE) and the coverage probability of the credible interval. We also provide the length of credible interval, which evaluates the precision of the posterior distributions.

We also add to the comparison the estimate implemented in the R package `mediation` (see Tingley et al. (2014)). In the function `mediate` a quasi-Bayesian Monte Carlo method based on normal approximation is implemented to estimate NDE(0), NDE(1) and NIE(0), NIE(1) (see Imai et al. (2010a) for details).

Simulated dataset We generate historical and current data from three distinct situations, we do not include a W covariate in the different scenarios. In all cases, the standard deviation of the linear model (3.5) is set to $\sigma = 0.75$ for both datasets. For the historical sample we choose the parameters $\theta_M = (1, -2), \theta_Y = (-0.5, 1, 1.5)$ for the three different scenarios. The current sample is simulated with the following values of the parameters (θ_M, θ_Y) :

case 1 the same values as the historical data.

case 2 the values increased by 10% .

case 3 only the direction of the relationships between the variables (X, M, Y) does not change. We set $\theta_M = (1, -3), \theta_Y = (-1, 0.75, 2)$. It is the worst of the three cases for Model 1. The historical dataset bring misleading informations in the prior distribution.

Table 3.2 provides the true values of the parameters for all cases and the estimation of the parameters on the historical sample of size $N = 100$.

These three situations make sense in real studies. For instance, in a longitudinal study, one might think that the relationships between the variables could be comparable over time. To assess the quality criteria, we generate $N = 1000$ independent copies. Figure 3.3

gives a comparison of the posterior distributions of $\text{NDE}_\theta(0)$, $\text{NIE}_\theta(1)$. They are calculated on one of the samples simulated in the case 1 (with $N = \{50, 100, 150\}$). From the posterior distributions of $\text{NDE}_\theta(0)$ and $\text{NIE}_\theta(1)$ calculated on the small sample $N = 50$, we clearly show the interest of including historical information in the prior distribution. Indeed, the accuracy and the precision of posterior distributions of $\text{NDE}_\theta(0)$ and $\text{NIE}_\theta(1)$ are better with informative prior (Model M1). As expected, the differences decrease as the sample size increases (see Figure 3.3).

To explain the difference we also simulate sample from the prior distribution. As the prior distribution of the variance σ^2 is improper, we fix its value to 1. Figure 3.4 provides the corresponding prior distributions of $\text{NDE}_\theta(0)$ and of $\text{NIE}_\theta(1)$. For the informative model M1, the prior distributions are asymmetric. Therefore they bring information on the signs of the $\text{NDE}_\theta(0)$ and $\text{NIE}_\theta(1)$ effect parameters. This information is in accordance with the parameter values. For the weakly informative M2 model and the non informative M3 model, the prior distributions are symmetric and concentrated around zero (especially for the M2 model). The absence of direct or indirect effect is therefore favoured by these two prior distributions.

Results All the numerical results are summarized in Table 3.3. In all cases, the informative model (Model 1) provides the smallest root mean square error but at the same time Model 1 provides shorter credible intervals. Moreover, the credible intervals estimated with Models 1 and 3 and with the mediation function have a correct confidence level, about 95% for all samples of N size.

In any case, for the parameter NIE(1), the historical informations reduced by half the bias of the estimation . For the parameter NDE(0), performance is lower, historical information further reduces bias in case 1 but Model 3 is better in cases 2 and 3.

Model 2 based on weakly informative priors and introduced by Gelman et al. (2007) had the worst statistical properties in all case. Note that we apply this prior distribution to the logistic part of a mediation model which is not the context studied in Gelman et al. (2007). Model 3 based on the $G-$priors has better statistical properties than the mediate function in all cases.

To summarize the numerical results, the choice of G-priors is the best choice if no information is available and otherwise the informative model can be used, which even in the worst case will not deteriorate the statistical properties of the estimates.

TABLE 3.3 – m denotes the mediate function, 1,2,3 the number of the precedent models. CL denotes the frequentist coverage probability of the credible interval and L its length.

		NDE(0)					NIE(1)				
N	model	bias	Rbias	RMSE	CL	L	bias	Rbias	RMSE	CL	L
CASE 1 : Time-invariant parameters											
30	m1	-0.023	-0.09	0.076	0.991	0.416	0.027	-0.074	0.115	0.945	0.453
	m2	-0.107	-0.428	0.195	0.928	0.716	0.11	-0.306	0.17	0.896	0.57
	m3	-0.027	-0.109	0.2	0.928	0.715	0.057	-0.158	0.161	0.941	0.568
	m	-0.06	-0.24	0.195	0.968	0.766	0.075	-0.209	0.163	0.945	0.632
50	m1	-0.017	-0.068	0.07	0.985	0.375	0.027	-0.075	0.091	0.953	0.376
	m2	-0.078	-0.313	0.155	0.925	0.576	0.083	-0.23	0.131	0.91	0.457
	m3	-0.019	-0.076	0.147	0.94	0.568	0.042	-0.118	0.115	0.946	0.448
	m	-0.043	-0.172	0.15	0.964	0.593	0.057	-0.159	0.122	0.956	0.481
100	m1	-0.011	-0.043	0.061	0.988	0.309	0.016	-0.044	0.067	0.957	0.281
	m2	-0.042	-0.169	0.104	0.946	0.41	0.044	-0.124	0.086	0.916	0.324
	m3	-0.006	-0.023	0.098	0.943	0.398	0.019	-0.054	0.076	0.947	0.312
	m	-0.02	-0.08	0.101	0.958	0.409	0.029	-0.079	0.08	0.949	0.327
CASE 2 : Time-varying parameters : 10% increase for θ_M, θ_Y											
30	m1	-0.034	-0.139	0.075	0.98	0.394	0.033	-0.08	0.116	0.952	0.46
	m2	-0.118	-0.478	0.193	0.923	0.718	0.12	-0.292	0.179	0.9	0.592
	m3	-0.032	-0.129	0.187	0.946	0.706	0.061	-0.148	0.162	0.942	0.578
	m	-0.065	-0.263	0.186	0.976	0.769	0.082	-0.201	0.167	0.954	0.657
50	m1	-0.025	-0.1	0.065	0.991	0.352	0.023	-0.057	0.094	0.955	0.378
	m2	-0.079	-0.32	0.149	0.934	0.573	0.08	-0.194	0.134	0.906	0.474
	m3	-0.015	-0.061	0.135	0.945	0.553	0.035	-0.086	0.116	0.943	0.454
	m	-0.04	-0.16	0.141	0.964	0.584	0.052	-0.126	0.123	0.952	0.495
100	m1	-0.018	-0.074	0.058	0.986	0.29	0.016	-0.04	0.067	0.964	0.279
	m2	-0.048	-0.196	0.105	0.938	0.401	0.046	-0.113	0.089	0.927	0.329
	m3	-0.011	-0.044	0.094	0.95	0.383	0.02	-0.05	0.077	0.947	0.313
	m	-0.024	-0.099	0.099	0.956	0.397	0.03	-0.072	0.082	0.952	0.331
CASE 3 : Invariant direction in the relationship											
30	m1	-0.111	-0.279	0.137	0.955	0.543	0.057	-0.127	0.14	0.963	0.586
	m2	-0.217	-0.548	0.29	0.892	0.875	0.206	-0.454	0.265	0.867	0.745
	m3	-0.077	-0.195	0.265	0.943	0.876	0.095	-0.211	0.232	0.942	0.742
	m	-0.126	-0.317	0.254	0.968	0.931	0.124	-0.275	0.23	0.952	0.819
50	m1	-0.09	-0.228	0.123	0.969	0.508	0.05	-0.11	0.118	0.966	0.513
	m2	-0.149	-0.377	0.226	0.923	0.744	0.141	-0.311	0.201	0.896	0.641
	m3	-0.034	-0.085	0.19	0.955	0.719	0.048	-0.105	0.162	0.958	0.614
	m	-0.075	-0.189	0.192	0.967	0.749	0.076	-0.168	0.169	0.968	0.658
100	m1	-0.074	-0.186	0.115	0.952	0.444	0.051	-0.113	0.102	0.953	0.418
	m2	-0.101	-0.254	0.173	0.912	0.569	0.097	-0.213	0.152	0.905	0.491
	m3	-0.029	-0.073	0.146	0.942	0.541	0.038	-0.083	0.123	0.952	0.463
	m	-0.056	-0.14	0.151	0.95	0.554	0.058	-0.128	0.13	0.956	0.483

3.6 Testing the absence of effect :

Investigators may be interested by the absence of direct effect or indirect effect. When X is a binary variable, it amounts to test $\text{NDE}(0) = 0$, $\text{NDE}(1) = 0$, $\text{NIE}(0) = 0$ or $\text{NIE}(1) = 0$.

Proposition 3.6.1. *Let (X, M, Y) a mediation model defined by* (3.4) *and* (3.5)*. We assume that a sequential ignorability assumption hold. The following statements are equivalents :*

$$\text{NDE}(0) = 0 \Longleftrightarrow \text{NDE}(1) = 0 \Longleftrightarrow \gamma = 0$$

$$\text{NIE}(0) = 0 \Longleftrightarrow \text{NIE}(1) = 0 \Longleftrightarrow \alpha\beta = 0$$

Démonstration. The proof is in appendix □

Testing the absence of the direct or the indirect effect is one of the major issues of the mediation analysis. Let α_c be the significance level of the test. We can perform standard tests based on the parameters α, β, γ :

— For the absence of direct effect ($\gamma = 0$), in logistic model, we can use a likelihood ratio test (LR test) or a Wald test.

— For the absence of indirect effect ($\alpha\beta = 0$), MacKinnon (2008) proposed a bootstrapping procedure. The $(1 - \alpha_c)$ BCa (bias-corrected and accelerated) bootstrapping confidence interval for the parameter $\alpha\beta$ is computed. The decision rule is to reject the absence of indirect effect when 0 is not in the confidence interval.

Procedure testing for the absence of effects : Thank to the results of Proposition 3.6.1, the hypothesis can be expressed using the parameters $\text{NDE}(x)$ and $\text{NIE}(x)$ ($x \in \{0, 1\}$). Let us consider the hypothesis of absence of direct effect defined by $\mathcal{H}_0 : \text{NDE}(x) = 0$ against $\mathcal{H}_1 : \text{NDE}(x) \neq 0$. We propose frequentist decision rule based on credible interval. Indeed, it is well-known that if R_n is a confidence interval of the parameter $\text{NDE}(x)$ with $(1 - \alpha_c)$ asymptotic level. Then $0 \in R_n$ gives the critical region for testing $\mathcal{H}_0 : \text{NDE}(x) = 0$ against $\mathcal{H}_1 : \text{NDE}(x) \neq 0$. We propose to replace the confidence interval by the $(1 - \alpha_c)$ credible interval $\mathcal{I}_{\alpha_c}$ of the parameter $\text{NDE}(x)$. Our decision rule is the following :

> We reject the null hypothesis when the credible interval $\mathcal{I}_{\alpha_c}$ does not contain 0.

The asymptotic properties of the posterior distribution ensure that the significance level of this procedure is α_c. Indeed, the frequentist coverage level of $(1-\alpha_c)$ credible interval $\mathcal{I}_{\alpha_c}$ is $(1-\alpha_c)$ i.e. for all NDE(x)

$$\mathbb{P}_{\theta_M,\theta_Y}\Big(\text{NDE}(x) \in \mathcal{I}_{\alpha_c}\Big) \to 1-\alpha_c, \qquad N \to \infty,$$

See Ghosh et al. (1997), chapter 4 for theoretical results and Table 3.3 for the numerical illustrations. In particular, under the null hypothesis

$$\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}\Big(0 \notin \mathcal{I}_{\alpha_c}\Big) \to \alpha_c, \qquad N \to \infty.$$

The same procedure can be implementing for testing :

— the absence of indirect effect defined by $\mathcal{H}_0 : \text{NIE}(x) = 0$

— the absence of causal effect defined by $\mathcal{H}_0 : \psi = 0$ where $\psi = \text{NDE}(x) + \text{NIE}(1-t)$.

This approach is motivated by the numerical results obtained in Table 3.3, where we can see that the frequentist coverage probability quickly converges to $1-\alpha_c$, in particular when we use informative prior. This property is important to guarantee a correct asymptotic significance level. In the following numerical experiments, we illustrate that this approach has better performance in term of significance level than the classical testing procedures .

Numerical comparison : We compare our testing procedure to the LR test (respectively bootstrapping procedure) for the absence of direct (respectively indirect) effect. For this comparison , we generate $B = 1000$ sample from the following model : for all $i \in \{1, \dots, N\}$, the triple (X_i, M_i, Y_i) is i.i.d. from

$$\begin{aligned} X_i &\sim \mathcal{B}(0.4), \\ M_i &\sim \mathcal{N}(1+\alpha X_i, 0.75^2), \\ Y_i &\sim \mathcal{B}(p_i), \\ p_i &= \frac{1}{1+e^{-(-2+\beta M_i+\gamma X_i)}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

We set the significant level $\alpha_c = .05$ and we compare the empirical probability to reject the null hypothesis.

Table 3.4 gives the results for testing the absence of direct effect. The value $\gamma = 0$ corresponds to the empirical size of tests, and $\gamma > 0$ to the empirical power. The

TABLE 3.4 – The empirical probability to reject the absence of direct effect using our Bayesian decision rule and using the LR test. We set the significant level and $\alpha_c = .05$ $\alpha = \beta = 2$ in the model defined in (3.10)

		NDE(0)	NDE(1)	LR test
	$N = 30$	0.04	0.04	0.05
$\gamma = 0$	$N = 50$	0.03	0.03	0.05
	$N = 100$	0.05	0.05	0.07
	$N = 30$	0.09	0.09	0.10
$\gamma = 1$	$N = 50$	0.11	0.11	0.12
	$N = 100$	0.21	0.21	0.21
	$N = 30$	0.23	0.23	0.24
$\gamma = 2$	$N = 50$	0.36	0.36	0.37
	$N = 100$	0.64	0.64	0.63
	$N = 30$	0.41	0.41	0.39
$\gamma = 3$	$N = 50$	0.78	0.78	0.77
	$N = 100$	0.97	0.97	0.96

two approaches have the same performances in terms of empirical size. As expected, the empirical power of the different tests increases with γ and N, with the same rate of convergence.

Table 3.5 gives the results for testing the absence of indirect effect. The performances of the test depend on the product $\alpha\beta$, but also the values of each parameters α, β. That's why α is fixed and we illustrate the convergence rate of the power as a function of $\alpha\beta$. Let's remember that the value $\alpha\beta = 0$ corresponds to the empirical size of tests, and $\alpha\beta > 0$ to the empirical power. Both Bayesian procedures have an empirical size closer to the nominal level $\alpha_c = 0.05$ than the bootstrapping procedure. As expected, the empirical power of the different tests increases with $\alpha\beta$ and N, but the Bayesian procedure are uniformly more powerful. In addition, Bayesian procedure is less expensive in term of computation time.

3.7 Application to schoolchildren's Well-Being :

The data come from a longitudinal study conducted between 2012 and 2015 on schoolchildren aged 6 to 9 years at the beginning of the study. The schools were selected in the area of Nantes, France by the Directorate for Assessment of the French Ministry of education, in order to collect data from representative sample of children in this age group (287 children taking part in the three waves of data collection, 54.7% girls). The parents

Table 3.5 – The empirical probability to reject the absence of indirect effect using our Bayesian decision rule and the bootstrapping procedure. We set $\alpha_c = .05$, $\gamma = 2$, $\alpha = 2$ in the model defined in (3.10). The indicated values of the product $\alpha\beta$ correspond to $\beta \in \{0, 0.05, ...\}$

$\alpha\beta$	N	NIE(0)	NIE(1)	boot
	30	0.07	0.07	0.01
$\alpha\beta = 0$	50	0.06	0.06	0.04
	100	0.06	0.06	0.04
	30	0.06	0.06	0.01
$\alpha\beta = 0.1$	50	0.08	0.08	0.04
	100	0.04	0.04	0.03
	30	0.07	0.07	0.02
$\alpha\beta = 0.5$	50	0.10	0.10	0.06
	100	0.10	0.10	0.07
	30	0.13	0.13	0.03
$\alpha\beta = 1.00$	50	0.20	0.20	0.12
	100	0.28	0.28	0.21
	30	0.20	0.20	0.05
$\alpha\beta = 1.50$	50	0.30	0.30	0.22
	100	0.57	0.57	0.46
	30	0.35	0.35	0.24
$\alpha\beta = 2.00$	50	0.30	0.30	0.23
	100	0.78	0.78	0.73
	30	0.60	0.60	0.42
$\alpha\beta = 3.00$	50	0.59	0.59	0.47
	100	0.98	0.98	0.97
	30	0.81	0.81	0.51
$\alpha\beta = 4.00$	50	0.82	0.82	0.73
	100	1.00	1.00	1.00

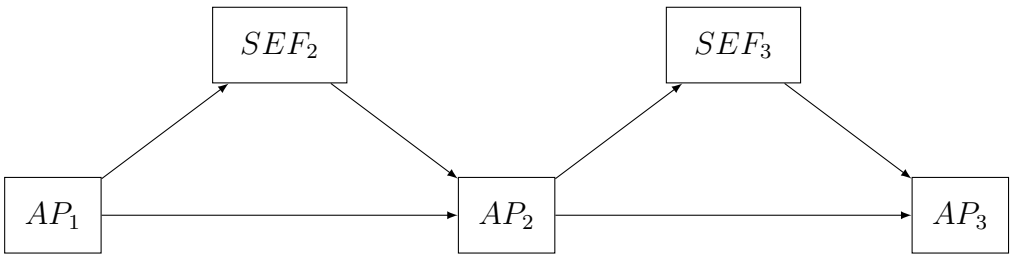


FIGURE 3.5 – Structural model. AP : Academic Performance, SEF : Self Efficacy Feeling.

received a letter informing them of the purpose of the research and a signed consent form to be returned before the first data collection. The data were collected three times in the spring, at one-year intervals. Some of the issues addressed in this study include the relationship between a student's self efficacy feeling and academic performance. The researchers would like to prove that the schoolchildren's academic performance at time $t+1$ depends directly on their academic performance at time t and indirectly through their Self Efficacy Feeling (see Figure 3.5). Teachers evaluate academic performance as follows : $AP = 1$ if the schoolchildren's results reach (or exceed) the expected level and $AP = 0$ otherwise. The Self-Efficacy Feeling was measured using the Masson and Fenouillet (2013) 11-item questionnaire scale. The items of this scale are ranging from 1 (not agree at all) to 6 (totally agree). Schoolchildren completed the paper and pencil questionnaires during school time directly in their classroom. In this model, we have only retained children who are still in primary school at the time of the third data collection ($N = 79$).

We do not propose longitudinal modeling, but we apply the mediation model to the two measurement times independently. For the first time measurement, the dataset is $(Y, X, M) = (AP_2, AP_1, SEF_2)$. We apply only Model 3 since no historical information is available to construct Model 1. For the second time measurement, $(Y, X, M) = (AP_3, AP_2, SEF_3)$, both models can be implemented. For Model 1, the prior distribution is constructed taking $(Y, X, M) = (AP_2, AP_1, SEF_2)$ as historical sample. Note that AP_2 can be used to construct the informative prior because the mediation model is defined conditionally to X.

For sampling from the posterior distribution of the parameter of interest, we run MCMC algorithm with 100,000 iterations and 2 chains. The comparison of the noninformative model calculated on the two consecutive time measurement shows that the θ_M parameter does not change much between the two studies, unlike θ_Y parameter (see pink and blue curve in Figure 3.6). For the second time measurement, we can use the informative (Model 1) and non informative (Model 3). For all parameters θ_M, θ_Y, the informative

	Model 1			Model 3		
	estimate	ci_lower	ci_upper	estimate	ci_lower	ci_upper
NDE(0)	0.493	0.283	0.684	0.471	0.269	0.662
NDE(1)	0.437	0.238	0.642	0.428	0.236	0.629
NIE(0)	0.104	0.017	0.225	0.097	-0.013	0.227
NIE(1)	0.050	0.007	0.140	0.054	-0.006	0.159

TABLE 3.6 – 95 %-Credible Interval for $\mathrm{NDE}(x), \mathrm{NIE}(x)$ $(x \in \{0, 1\})$ parameters at the second time measurement

prior provides more precise estimations (see green and blue curve in Figure 3.6), but the improvement is particularly significant for the parameter θ_M that is quite constant between the two times of measurement. This is the most favourable situation for the transfer of information from historical data via our informative prior (Model 1).

Figure 3.7 and Table 3.6 provide the comparison of the different estimates (posterior distribution and 95% credible intervals) for the parameters $\mathrm{NDE}(0), \mathrm{NDE}(1), \mathrm{NIE}(0), \mathrm{NIE}(1)$. For these parameters :

— the estimates are close for both models,

— the credible intervals estimated by Model 1 are shorter than those estimated by the Model 3 for the two natural indirect effects. This property had already been noticed in the simulation part (see Table 3.3).

As $\mathrm{NDE}(x), \mathrm{NIE}(x)$ are function of the parameters θ_M, θ_Y and θ_Y evolves significantly between the two measurement times, the gain from the transfer of information is not very important.

In addition, the application of our decision rule based on the credible interval (see section 3.6) allows us to test the significance of these parameters. The conclusion of testing procedure are the following :

— the past academic performances have a significant direct effect for the two groups (AP =1 and AP=0)

— the direct effect varies over time while the indirect effect does not (see Figure 3.7).

— the direct and indirect effects for the two groups (AP = 0 and AP = 1) are significant at the second time measurement only for the estimates obtained with Model 1.

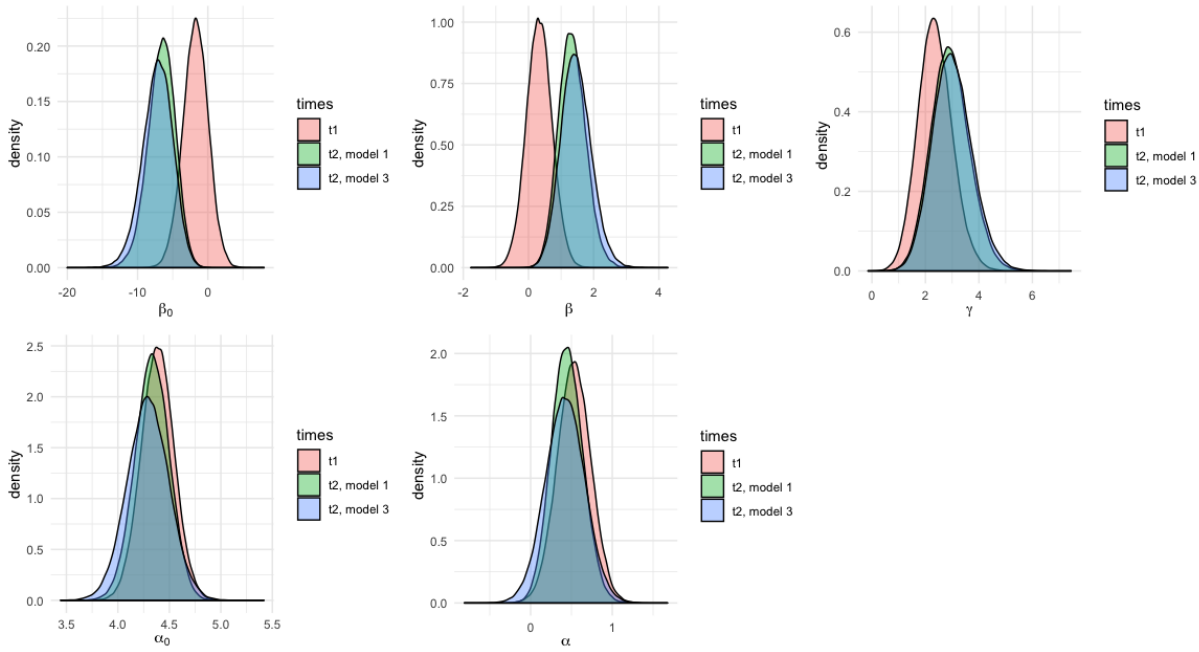


FIGURE 3.6 – Posterior distribution of the parameters $\theta_M = (\alpha_0, \alpha)$ and $\theta_Y = (\beta_0, \beta, \gamma)$ calculated on the data of the second measurement time. These posterior distributions of θ_M, θ_Y have been estimated with the Model 3.

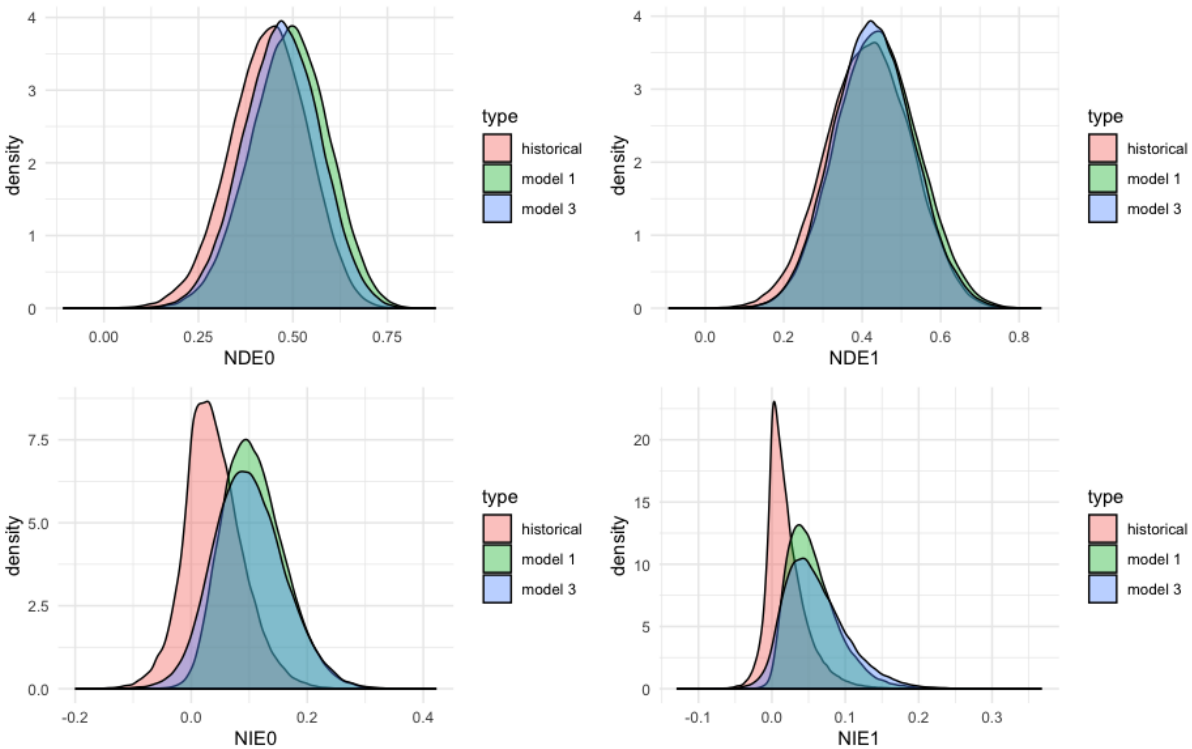


FIGURE 3.7 – Posterior distribution of the parameters of interest $\mathrm{NDE}(x), \mathrm{NIE}(x)$ ($x \in \{0, 1\}$) calculated on the data of the second measurement time. The density in pink (denoted by historical) represents the prior information (used in Model 1) and corresponds to the posterior distribution obtained at the first measurement time.

3.8 Discussion and conclusion

The Bayesian approach introduced by Launay et al. (2015) provides informative prior based on the knowledge of historical sample. The key idea is to learn the correlation between the parameters from the historical sample. As shown in the numerical results, the improvement brought upon non or weakly informative prior is more particularly important when there are weak variation on the parameters. This situation seems to be realistic in a longitudinal study. Its application to schoolchildren's Well-Being confirms this impression. We obtain estimation of direct and indirect effects more precise than the standard method implemented in R package mediation (see Tingley et al. (2014)). We propose also a Bayesian decision rule for testing the absence of a direct effect or an indirect effect. For the direct effect we can see numerically that the Bayesian rule performs similarly than the classical Student's t-test. For the indirect effect, there is no exact test but a bootstrapping test is typically used. The comparison with this test is in favor of our Bayesian rule.

Aknowledgements

This research was funded by several grants from the French Ministère de l' Education Nationale et de l'Enseignement Supérieur, the Défenseur des Droits, and l'Agence pour la Cohésion Sociale et l'Egalité des Chances.

3.9 Appendix

3.9.1 Proof of the Proposition 3.2.2

The proof is based on the standard identification of $\mathbb{E}(Y_{x,M_{x'}}|W=w)$ for (x,x')

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big(Y_{x,M_{x'}}|W=w\Big) &= \int \mathbb{E}\Big(Y_{x,M_{x'}}|M_{x'}=m,W=w\Big)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M_{x'}|W=w}(m)\\
&\overset{(C1)}{=} \int \mathbb{E}\Big(Y_{x,m}|M_{x'}=m,W=w\Big)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M_{x'}|W=w}(m)\\
&\overset{(I4)}{=} \int \mathbb{E}\Big(Y_{x,m}|W=w\Big)\,\mathrm{d}\,\mathbb{P}_{M_{x'}|W=w}(m)
\end{aligned}$$

Both terms appearing in the last integral can be rewritten as follows

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(Y_{x,m}|W=w\Big) &\overset{(4.8)}{=} \mathbb{E}\Big(Y_{x,m}|X=x,W=w\Big)\\ &\overset{(I2)}{=} \mathbb{E}\Big(Y_{x,m}|X=x,M=m,W=w\Big)\\ &\overset{(C2)}{=} \mathbb{E}\Big(Y|X=x,M=m,W=w\Big),\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{M_{x'}|W=w}(m) &\overset{(I3)}{=} \mathbb{P}_{M_{x'}|X=x',W=w}(m)\\ &\overset{(C3)}{=} \mathbb{P}_{M|X=x',W=w}(m).\end{aligned}$$

3.9.2 Proof of the proposition 3.6.1

Let us consider the defined function

$$g_\theta(x,m,w) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\gamma+\beta m+\eta_2 w)}} - \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta m+\eta_2 w)}}\right] e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(m-\alpha_0-\alpha x-\eta_1 w)^2} f_{\theta_W}(w)$$

As $z \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-z}}$ is a strictly decreasing function, $m \mapsto g_\theta(x,m,w)$ has the same sign as γ for arbitrary $x \in \{0,1\}, w \in \mathcal{W}$. Thus, according to (3.7a), NDE(x) is the integral of a non-negative (or negative) function. Therefore, the equation NDE$(x) = 0$ is obviously equivalent to $g_\gamma(x,m,w) = 0$ for all $m \in \mathcal{M}, w \in \mathcal{W}$, which is in turn equivalent to $\gamma = 0$.

For the indirect effect, by the method of substitution, a straightforward calculus leads to :

$$\begin{aligned}\mathrm{NIE}(x) =& \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\iint\left(\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta(m+\alpha_0+\eta_1 w)+\gamma x)}} - \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta(m+\alpha_0+\alpha+\eta_1 w)+\gamma x)}}\right)\\ & e^{-\frac{1}{2\sigma^2}m^2} f_{\theta_W}(w)\,\mathrm{d}\,m\,\mathrm{d}\,w\end{aligned}$$

We prove that NIE$(x) = 0$ is equivalent to $\alpha\beta = 0$. We use the same argument with the function $\widetilde{h}_\theta$ defined by

$$\widetilde{h}_\theta(m) := \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta(m+\alpha_0+\eta_1 w)+\gamma x)}} - \frac{1}{1+e^{-(\beta_0+\beta(m+\alpha_0+\alpha+\eta_1 w)+\gamma x)}}\right),$$

that has the same sign as $\alpha\beta$ for arbitrary (x,w).

Chapitre 4

Médiation modérée dans un modèle à plusieurs variables d'exposition

Ce travail a été réalisé en collaboration avec Christine Joffrion (Maitre de Conférence, laboratoire LPPL), Alison Caillé (Doctorante CIFFRE du LPPL) et Nina Courtois (stagiaire Master 2 psychologie du travail). La partie non bayésienne est publiée dans Caillé et al. (2019).

Face à l'évolution du monde du travail mais également aux aspirations émergentes des salariés, les entreprises sont progressivement amenées à réinventer leurs modes de fonctionnement en favorisant des méthodes participatives basées sur la confiance, l'autonomie, le travail d'équipe et la collaboration. Ainsi, l'innovation managériale, au travers de l'expérimentation de "nouveaux" modes d'organisation et styles de leadership, est de plus en plus en vogue au sein des entreprises qui souhaitent combiner l'amélioration de leur performance à celle du bien-être au travail des salariés (BEPT : Bien-Être Psychologique au Travail) et à celle de leur engagement vis à vis de leur entreprise. L'un des objectifs de cette étude est d'analyser les effets directs des quatre dimensions du LeaderShip Habilitant sur l'engagement au travail (EOA), mais également les effets bénéfiques indirects de ce nouveau mode de management à travers une augmentation du bien-être au travail des employés. La figure 4.1 présente le modèle théorique de médiation envisagé. Ce modèle comporte :

— quatre variables d'exposition qui sont les quatre dimensions du LH : Sens au travail (Sens), confiance, participation aux prises de Décision (Décision) et Autonomie dans le travail.

— un médiateur qui est le Bien Etre Psychologique au Travail (BEPT)

— une variable réponse qui est l'engagement organisationnel affectif (EOA).

Toutes les variables considérées dans ce modèle sont continues.

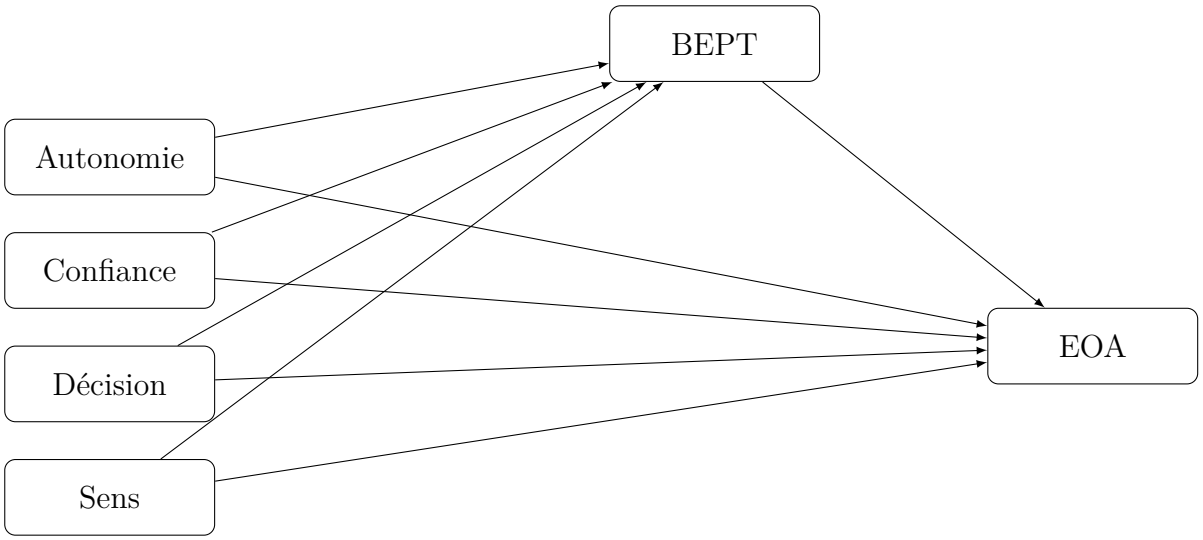


FIGURE 4.1 – Modèle de médiation envisagé.

4.1 Contexte et objectif

4.1.1 Contexte de l'étude

Participants : Cette étude a été réalisée dans deux organisations différentes qui n'ont pas la même approche au niveau de leurs pratiques managériales. La première organisation est un organisme public (sapeurs pompiers) aux pratiques manégériales classiques et la deuxième une entreprise privée (entreprise aéronautique) ayant une pratique managériale habilitante. Au cours de ces sessions collectives les ojectifs académiques de l'enquête et la garantie de l'anonymat des réponses ont été présentées aux employés. Ces questionnaires sont auto-évalués, ils ont été administrés à $N = 255$ employés de l'entreprise aéronautique et à $N = 173$ sapeurs pompiers. Les passations ont eu lieu entre janvier et juin 2018.

Outils : Les variables d'intérêt ont été mesurées en utilisant les outils suivants :

— Le Bien-Etre Psychologique au Travail (BEPT) est mesuré avec l'échelle de Gilbert et al. (2011) composée de 22 items. La fiabilité de l'échelle est satisfaisante ($\alpha = 0.90$). Dix items mesurent le sentiment de sérénité des participants (par ex. « Je me sens en santé, en pleine forme. »), cinq items mesurent l'engagement au travail

(par ex. « Je suis fonceur, j'entreprends plein de choses. ») et sept items mesurent l'harmonie sociale (par ex. « Je suis en bons termes avec mes collègues »). Les répondants devaient indiquer leur degré d'accord avec les énoncés sur une échelle de Likert allant de 1 (jamais) à 5 (presque toujours).

— La dimension affective de l'engagement organisationnel (EOA) a été mesurée à l'aide l'échelle révisée de Meyer et al. (1993). Elle comporte six items (par ex. « Je me sens attaché(e) sur le plan affectif à mon entreprise. ») et présente une bonne fiabilité interne ($\alpha = 0.90$). Les participants devaient se situer entre 1 (pas d'accord) et 5 (tout à fait d'accord).

— Les quatre dimensions du leadership habilitant (LH) sont mesurées avec l'instrument de Ahearne et al. (2005) présenté dans l'annexe A. La fiabilité de l'échelle est bonne ($\alpha = 0.94$).

Analyse descriptive : La table 4.1 présente les analyses descriptives des six variables d'intérêt du modèle. La table 4.2 présente les corrélations observées sur cet échantillon et permet d'envisager d'un point de vue statistique l'utilisation d'un modèle de médiation puisque l'engagement au travail (EOA) est significativement lié aux quatre dimensions du LH et au BEPT.

Table 4.1 – Statistiques descriptives des variables d'intérêt.

	Leadership habilitant					
	Sens	Décision	Confiance	Autonomie	BEPT	EOA
N items	3	3	3	3	22	6
Mean	3.204	2.561	3.585	3.340	3.913	3.007
Std. Deviation	1.022	1.111	0.941	1.038	0.483	0.966
Minimum	1.000	1.000	1.000	1.000	2.090	1.000
Maximum	5.000	5.000	5.000	5.000	4.950	5.000

4.1.2 Objectifs de l'étude

Cette étude concerne deux objectifs complémentaires : d'une part tester le modèle de médiation théorique sur les données de l'échantillon et d'autre part étudier si les effets dans ce modèle sont identiques dans les deux organisations. Ceci se traduit par les deux hypothèses suivantes :

TABLE 4.2 – Pearson Correlations. Tous les coefficients de corrélation sont significatifs avec $p < .001$.

	EOA	SensW	PartDec	Confiance	Autonomie	BEPT
EOA	–					
SensW	0.488	–				
PartDec	0.436	0.651	–			
Confiance	0.407	0.607	0.631	–		
Autonomie	0.433	0.667	0.654	0.707	–	
BEPT	0.379	0.424	0.290	0.372	0.350	–

Hypothèse 1 En offrant des ressources organisationnelles (LH : Leadership Habilitant), les organisations optimisent l'activation de ressources individuelles (BEPT : bien-être psychologique au travail) susceptibles de générer de l'engagement au travail (EOA : Engagement Organisationnel Affectif). D'un point de vue statistique, on va tester cette hypothèse en mesurant les effets directs et indirects des quatre dimensions du LH sur l'EOA via le BEPT. La figure 4.1 résume le modèle correspondant à cette hypothèse.

Hypothèse 2 L'implémentation d'une démarche de LH des salariés au sein d'une organisation apporte plus de bien-être et de ce fait plus d'engagement chez les collaborateurs que des modes de management dits "classiques". Pour tester cette hypothèse et vérifier le modèle théorique proposé, nous avons réalisé une étude comparative entre une organisation publique se caractérisant par des modes de management traditionnels et plutôt directifs avec une organisation privée dans le secteur de l'industrie ayant implémentée une forme d'innovation managériale basée sur la "responsabilisation" des salariés. D'un point de vue statistique il s'agit de tester un effet dit modérateur de la structure sur le modèle de médiation défini dans la figure 4.1 et testé dans l'hypothèse 1.

Nous allons présenter la méthodologie classique et une alternative bayésienne pour tester ces deux hypothèses. Ces deux méthodologies seront présentées dans un cadre général dans la section 4.2 . Une comparaison des résultats obtenus avec ces deux approches est ensuite proposée dans la section 4.3). Pour l'hypothèse 2, nous proposons un test d'hypothèse basé sur le facteur de Bayes (4.3.3). Nous verrons en particulier que les échelles de Jeffreys (1961); Kass and Raftery (1995) pour le facteur de Bayes ne sont pas adaptées dans le cas étudié.

4.2 Modélisations statistiques

4.2.1 Modèle de médiation à plusieurs variables d'expositions

On considère plusieurs variables d'expositions continues $X_1, \ldots, X_K$. Le modèle de médiation considéré $\mathcal{M} := (X_1, \ldots, X_K, M, Y)$ avec M, Y continues est défini par le système

$$M = \theta_0^M + \theta_1^M X_1 + \ldots + \theta_K^M X_K + \varepsilon_M, \qquad \varepsilon_M \sim \mathcal{N}(0, \sigma_M^2) \tag{4.1}$$

$$Y = \theta_0^Y + \theta_1^Y X_1 + \ldots + \theta_K^Y X_K + \theta_M^Y M + \varepsilon_Y, \qquad \varepsilon_Y \sim \mathcal{N}(0, \sigma_Y^2) \tag{4.2}$$

Cette modélisation est résumée dans la figure 4.2.

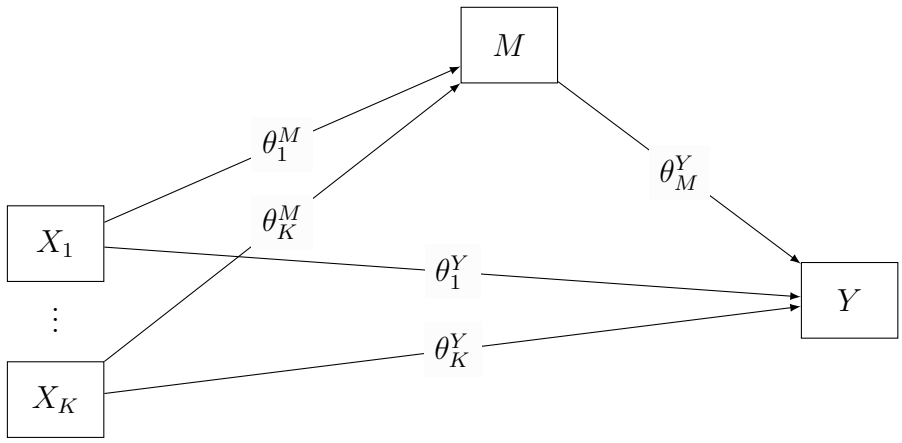


FIGURE 4.2 – Modèle de médiation à K expositions

Il s'agit d'un modèle de régressions linéaires multiples, les effets directs et indirects sont définis par :

— L'effet direct de la variable X_k sur Y est θ_k^Y

— L'effet indirect de la variable X_k sur Y est $\theta_k^M \theta_M^Y$

On trouvera une présentation générale de ces modèles par exemple dans Hayes (2018); MacKinnon (2008).

Remark 4.2.1.

1. *Ces effets seraient plus compliqués à identifier en présence d'interactions entre les variables. On a considéré dans la modélisation qu'il n'y avait pas d'interaction et on a regardé l'effet individuel de chaque dimension du LH sur l'engagement organisationnel.*

2. *Dans ce type de modélisation, Hayes (2018) propose également d'utiliser K modèles indépendants. Nous avons exclu cette démarche dans la mesure où les psychologues souhaitaient étudier les impacts de chacune des dimensions en contrôlant l'effet des autres. La matrice de corrélation 4.2 montre en effet une forte corrélation entre toutes les dimensions du LH.*

Inférence sur les effets directs et indirects

Dans l'article nous avons réalisé l'inférence sur les effets en suivant la méthodologie préconisée par Hayes (2018).

Inférence sur les effets directs : les effets directs correspondent aux coefficients θ_k^Y dans l'équation (4.2), un test de Student permet donc de tester l'existence des effets directs ($\theta_k^Y = 0$ contre $\theta_k^Y \neq 0$).

Inférence sur les effets indirects : Les effets indirects correspondent aux produits $\theta_k^M \theta_M^Y$ des coefficients définis dans les équations (4.1) et (4.2). On utilise le bootstrap pour approcher la distribution de ces produits et on obtient ainsi des intervalles de confiance qui serviront de région critique pour tester $\theta_k^M \theta_M^Y = 0$ contre $\theta_k^M \theta_M^Y \neq 0$.

Alternative bayésienne

L'article du chapitre 3 présente une adaptation des $G-$priors à un modèle de médiation simple à réponse binaire. Yuan and MacKinnon (2009) proposent d'utiliser l'inférence bayésienne dans le cadre du modèle linéaire mais n'utilisent par les G-priors comme loi a priori non informatives. Dans cette étude aucune donnée historique n'était disponible, mais dans le cas contraire il aurait été facile d'adapter l'approche développée par Launay et al. (2015).

Soit $\theta := (\theta^M, \sigma_M^2, \theta^Y, \sigma_Y^2)$ où $\theta^M = (\theta_0^M, \ldots, \theta_K^M)$ et $\theta^Y = (\theta_0^Y, \ldots, \theta_K^Y, \theta_M^Y)$ le vecteur des paramètres à estimer du modèle $\mathcal{M}$ défini par (4.1) et (4.2).

Le modèle $\mathcal{M}$ est gaussien, il a pour vraisemblance :

$$\mathcal{L}_\theta(X_1, ..., X_K, M, Y) = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{2\pi\sigma_M\sigma_Y} e^{-\frac{1}{2\sigma_M^2}\left(M_i - \theta_0^M - \theta_1^M X_{1i} - \ldots \theta_K^M X_{Ki}\right)^2} \times e^{-\frac{1}{2\sigma_Y^2}\left(Y_i - \theta_0^Y - \theta_1^Y X_{1i} - \ldots \theta_K^Y X_{Ki} - \theta_M^Y M_i\right)^2} \quad (4.3)$$

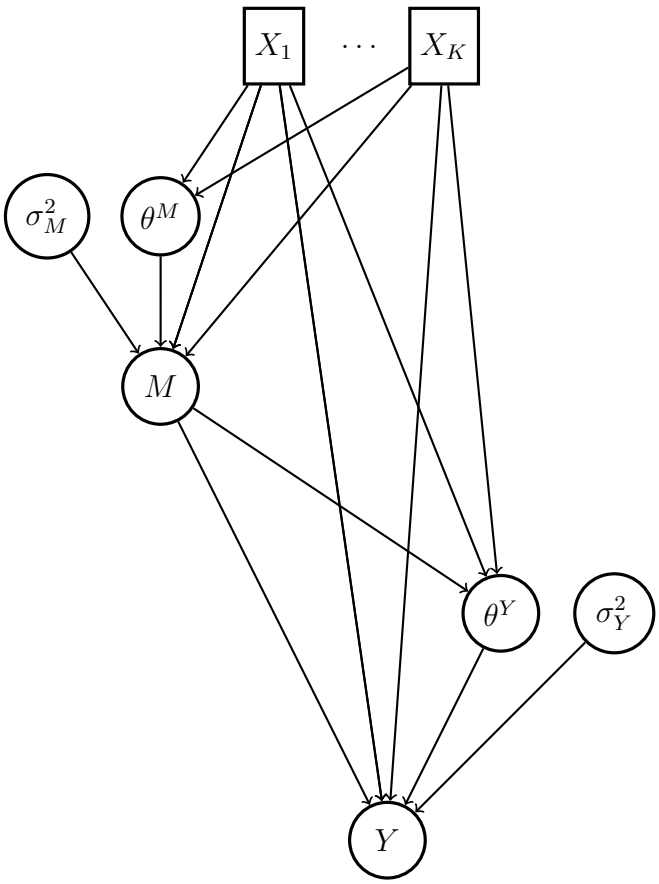


FIGURE 4.3 – DAG for pour le modèle de médiation $\mathcal{M}$

Pour définir les lois a priori sur les paramètres $(\theta^M, \sigma^2_M, \theta^Y, \sigma^2_Y)$ et ainsi adapter les G-priors à ce modèle de médiation, on utilise la loi jointe qui découle du DAG 4.3 :

$$\begin{aligned} p(M, Y, \theta | X_1, ..., X_K) &= p(Y|X_1, ..., X_K, M, \theta_Y, \sigma^2_Y) p(\theta^Y | X_1, ..., X_K, M, \sigma^2_Y) p(\sigma^2_Y) \times \\ & \quad p(M|X_1, ..., X_K, \theta_M, \sigma^2_M) p(\theta^M | X_1, ..., X_K, \sigma^2_M) p(\sigma^2_M) \end{aligned} \tag{4.4}$$

où :

— $p(Y|X_1, ..., X_K, M, \theta_Y, \sigma^2_Y)$ et $p(M|X_1, ..., X_K, \theta_M, \sigma^2_M)$ sont données respectivement par (4.1) et (4.2)

— Pour $p(\sigma^2_M)$ et $p(\sigma^2_Y)$ on choisit $p(\sigma^2_\bullet) \propto \sigma^{-2}_\bullet$

— Pour $p(\theta^Y | X_1, ..., X_K, M, \sigma^2_Y)$ on adapte le $G-$prior :

$$\theta^Y | X_1, \ldots, X_K, M, \sigma^2_Y \sim \mathcal{N}_{K+2}(0_{K+2}, N\sigma^2_Y (\phi'_Y \phi_Y)^{-1})$$

où $\phi_Y = \left[\mathbb{1}, X_1, ..., X_k, M\right]$

— De même pour $p(\theta^M | X_1, ..., X_K, \sigma_M^2)$

$$\theta^M | X_1, ...X_K, \sigma_M^2 \sim \mathcal{N}_{K+1}(0_{K+1}, N\sigma_M^2(\phi_M'\phi_M)^{-1})$$

où $\phi_M = \left[\mathbb{1}, X_1, ..., X_k\right]$.

Remark 4.2.2. *Un modèle avec interaction entre les variables d'expositions aurait également pu être adapté en intégrant des variables du type X_iX_j dans les équations* (4.1) *et/ou* (4.2) *et dans les matrices ϕ_M et/ou ϕ_Y.*

4.2.2 L'analyse de médiation modérée :

La notion de modération

On considère des populations différentes identifiées par une variable catégorielle W et on veut tester si l'effet d'une variable X sur une variable Y est le même indépendamment de la population $W = w$ considérée. Si l'effet de X sur Y dépend de la valeur de W, on dit que W modère l'effet de X sur Y.
Lorsque W est binaire et que le lien entre X et Y est linéaire, Hayes (2018) propose de tester l'effet modérateur de W en considérant un modèle avec interaction

$$Y = \theta_0^Y + \theta_W^Y W + (\theta_X^Y + \theta_{XW}^Y W)X + \varepsilon_Y$$

et traduit l'hypothèse "W modère l'effet de X sur Y" (la figure 4.4 illustre cette définition) par $\theta_{XW}^Y \neq 0$.

D'un point de vue statistique, on teste l'effet d'interaction à l'aide d'un test de Student sur le coefficient θ_{XW}^Y.

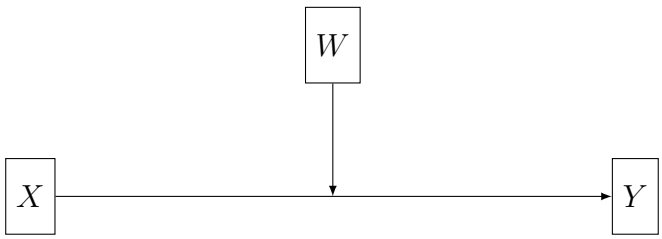


FIGURE 4.4 – Modèle de modération

La médiation modérée

On peut combiner dans le cadre du modèle linéaire les notions de modération et de médiation : par exemple si (X, M, Y) est un modèle de médiation simple, on peut regarder si la variable W modère une ou plusieurs des relations $X \to Y$, $X \to M$, $M \to Y$. Dans le cadre du modèle linéaire il suffit donc de tester un ou plusieurs coefficients.

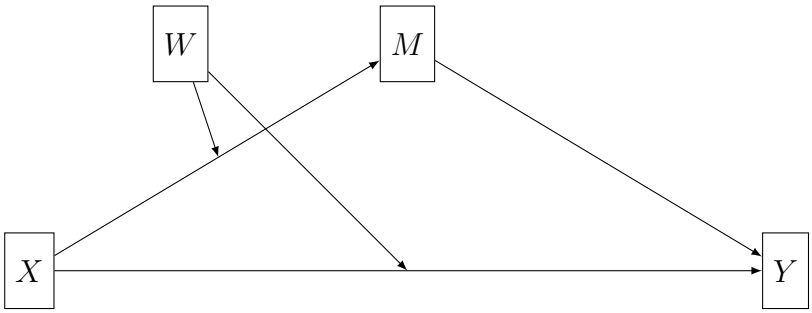


FIGURE 4.5 – Modèle de médiation modérée

Considérons l'exemple décrit par la figure 4.5. Pour tester cet effet modérateur, on définit :

$$[\mathcal{M}_0] : \begin{cases} M = \theta_0^M + \theta_W^M W + \theta_X^M X + \varepsilon_M \\ Y = \theta_0^Y + \theta_W^M W + \theta_1^Y X + \theta_M^Y M + \varepsilon_Y \end{cases}$$

$$[\mathcal{M}_1] : \begin{cases} M = \theta_0^M + \theta_W^M W + (\theta_X^M + \theta_W^M W) X + \varepsilon_M \\ Y = \theta_0^Y + \theta_W^Y W + (\theta_X^Y + \theta_{WX}^Y W) X + \theta_M^Y M + \varepsilon_Y \end{cases}$$

On va tester : $\mathcal{H}_0 : \theta_W^M = \theta_{WX}^Y = 0$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta_W^M \neq 0$ ou bien $\theta_{WX}^Y \neq 0$. On peut utiliser deux approches classiques pour tester $\mathcal{H}_0$: le test du rapport de vraisemblance ou bien le facteur de Bayes.

Test du rapport de vraisemblance Le problème statistique est classique (voir par exemple Wasserman (2004) P.164). Pour comparer les deux modèles linéaires $[\mathcal{M}_0]$ et $[\mathcal{M}_1]$, on peut utiliser le test du rapport de vraisemblance :

$$\lambda = 2 \log \left(\frac{\mathcal{L}(\widehat{\theta}_1)}{\mathcal{L}(\widehat{\theta}_0)} \right)$$

où $\widehat{\theta}_1$ et $\widehat{\theta}_0$ sont respectivement les estimateurs par maximum de vraisemblance pour les modèles $[\mathcal{M}_0]$ et $[\mathcal{M}_1]$. Sous $\mathcal{H}_0$, la statistique

$$\lambda \sim \chi^2(p)$$

où p est le nombre de coefficients à tester.

Remark 4.2.3. *On pourrait également envisager de tester une hypothèse pour chaque équation. Dans l'exemple précédent on ferait un test de Student pour chacun des coefficients (ou bien un test de Fisher sur modèles emboités si il y a plusieurs coefficients dans chacune des équations) et ensuite appliquer une correction de Bonferroni. On rejettera $\mathcal{H}_0$ au risque α si chacune des pvalue est inférieure à $\frac{\alpha}{2}$.*

Facteur de Bayes Comme suggéré par Marin and Robert (2014), le test statistique précédent peut être vu comme un problème de sélection de modèle . On peut alors utiliser le facteur de Bayes pour décider si il existe un effet modérateur. On définit les lois a priori des paramètres des deux modèles concurrents

— Pour le modèle $[\mathcal{M}_0]$, on utilise les G-priors définis par

$$\begin{aligned} \theta^M|X,W,\sigma_M^2 &\sim \mathcal{N}_3(0_3, N\sigma_M^2(\phi'_{M,0}\phi_{M,0})^{-1}) \text{ avec } \phi_{M,0} = \left[\mathbb{1}, W, X\right] \\ \theta^Y|X,M,W,\sigma_Y^2 &\sim \mathcal{N}_4(0_4, N\sigma_Y^2(\phi'_{Y,0}\phi_{Y,0})^{-1}) \text{ avec } \phi_{Y,0} = \left[\mathbb{1}, W, X, M\right] \end{aligned}$$

— Pour le modèle $[\mathcal{M}_1]$, on utilise les G-priors définis par

$$\begin{aligned} \theta^M|X,W,\sigma_M^2 &\sim \mathcal{N}_4(0_4, N\sigma_M^2(\phi'_{M,1}\phi_{M,1})^{-1}) \text{ avec } \phi_{M,1} = \left[\mathbb{1}, W, X, WX\right] \\ \theta^Y|X,M,W,\sigma_Y^2 &\sim \mathcal{N}_5(0_5, N\sigma_Y^2(\phi'_{Y,1}\phi_{Y,1})^{-1}) \text{ avec } \phi_{Y,1} = \left[\mathbb{1}, W, X, WX, M\right] \end{aligned}$$

On note $\mathfrak{M}^i(X,M,Y)$ ($i \in \{0,1\}$) la loi marginale correspondant à la vraisemblance (4.3) du modèle i et au choix des lois a priori décrit dans (4.4) . Le facteur de Bayes BF_{10} est alors défini par :

$$BF_{10} = \frac{\mathfrak{M}^1(X,M,Y)}{\mathfrak{M}^0(X,M,Y)}. \tag{4.5}$$

où :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}^i(X,M,Y) &= \int_{\Theta_i} p_{i,Y}(Y|X,M,W,\theta^Y,\sigma_Y^2)\pi(\theta^Y|X,M,W)\pi(\sigma_Y^2) \times \\
&\quad p_{i,M}(M|X,W,\theta^M,\sigma_M)\pi(\theta^M|X,W)\pi(\sigma_M^2) \times \mathrm{d}\,\theta^Y\,\mathrm{d}\,\sigma_Y^2\,\mathrm{d}\,\theta^M\,\mathrm{d}\,\sigma_M^2 \\
&= \int_{\Theta_{i,Y}} p_{i,Y}(Y|X,M,W,\theta^Y,\sigma_Y^2)\pi(\theta^Y|X,M,W)\pi(\sigma_Y^2)\,\mathrm{d}\,\theta^Y\,\mathrm{d}\,\sigma_Y^2 \times \\
&\quad \int_{\Theta_{i,M}} p_{i,M}(M|X,W,\theta^M,\sigma_M)\pi(\theta^M|X,W)\pi(\sigma_M^2)\,\mathrm{d}\,\theta^M\,\mathrm{d}\,\sigma_M^2
\end{aligned}$$

$p_{i,\bullet}$ étant les densités associées à chacune des deux équations dans le modèle $\mathcal{M}_i$ pour $i = 1, 2$. On a donc

$$\mathfrak{M}^i(X,M,Y) = \mathfrak{M}_M^i(X,M) \times \mathfrak{M}_Y^i(X,Y)$$

où $\mathfrak{M}_M^i(X,M)$ et $\mathfrak{M}_Y^i(X,Y)$ sont les marginales associées aux modèles linéaires définissant M et Y. Ainsi :

$$BF_{10} = BF_{10}^{M|X} \times BF_{10}^{Y|M,X}$$

Les facteurs de Bayes $BF_{10}^{M|X}$ et $BF_{10}^{Y|M,X}$ sont explicites (voir annexe C) et finalement on a :

$$BF_{10} = (N+1)^{-q/2}\left[\left(\frac{Y'Y - \frac{N}{N+1}Y'\phi_{Y,0}\widehat{\theta}_0^Y}{Y'Y - \frac{N}{N+1}Y'\phi_{Y,1}\widehat{\theta}_1^Y}\right)\left(\frac{M'M - \frac{N}{N+1}M'\phi_{M,0}\widehat{\theta}_0^M}{M'M - \frac{N}{N+1}M'\phi_{M,1}\widehat{\theta}_1^M}\right)\right]^{N/2}$$

où q est le nombre de variables ajoutées entre les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_0$.

Remark 4.2.4. *Les mêmes lois impropres sur σ_M^2, σ_Y^2 ont été utilisées car ces paramètres interviennent au numérateur et au dénominateur du facteur de Bayes, ceci permet d'utiliser le pseudo-BF (voir Marin and Robert (2014) pour plus de détails)*

Par suite, traditionnellement on utilise l'échelle de Jeffreys (1961) (voir tableau 4.3) pour décider quel modèle sera choisi entre $[\mathcal{M}_0]$ et $[\mathcal{M}_1]$ c'est à dire quelle hypothèse entre $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_1$ sera choisie. Cependant, aucun résultat théorique ne permet de justifier ce choix d'échelle. En pratique, le niveau d'évidence fourni par le facteur de Bayes n'est pas toujours en adéquation avec les tests fréquentistes (voir les résultats numériques section 4.3.3). Dans la section 4.2.3, un test de statistique $\log(BF_{10})$ est proposé.

$\log(BF_{10})$	$[0, 0.5[$	$[0.5, 1[$	$[1, 2[$	$[2, +\infty[$
Evidence against $\mathcal{H}_0$	weak	substantial	strong	decisive

Table 4.3 – Echelle du niveau d'évidence selon Jeffreys (1961)

4.2.3 Test de modération construit sur le facteur de Bayes

Comme alternative à l'échelle de Jeffreys (1961), on propose d'utiliser un critère fréquentiste, le seuil de significativité, pour calibrer le facteur de Bayes sur un modèle donné. On veut tester : $\mathcal{H}_0 : \theta_W^M = \theta_{WX}^Y = 0$ contre $\mathcal{H}_1 : \theta_W^M \neq 0$ ou bien $\theta_{WX}^Y \neq 0$. On va considérer comme statistique de test

$$\Lambda_n := \log(BF_{10})$$

défini en (4.5). Sous $\mathcal{H}_1$ le facteur de Bayes BF_{10} converge presque sûrement vers $+\infty$. Pour tout $q > 0$, une région critique de la forme $\{\Lambda_n > q\}$ fournit un test consistant. La valeur de $q := q_\alpha$ est fixée pour assurer que le test soit de niveau $\alpha \in]0, 1[$. Sous $\mathcal{H}_0$, la loi de Λ_n dépend des paramètres $\theta_{nuis} := (\theta_0^M, \theta_W^M, \theta_X^M, \sigma_M^2, \theta_0^Y, \theta_W^Y, \theta_X^Y, \sigma_Y^2)$ qui sont ici des paramètres de nuisance. Pour déterminer le quantile q_α, on utilise une méthode de Monte-Carlo. On va donc simuler des échantillons vérifiant $\mathcal{H}_0$ en prenant une valeur estimée du paramètre de nuisance. Comme les modèles $\mathcal{M}_0$ et $\mathcal{M}_1$ sont emboités ($\mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1$), on peut estimer les paramètres de nuisance en utilisant le modèle $\mathcal{M}_1$. L'estimateur sera consistant indépendamment du vrai modèle.

Pour approcher q_α, on procède de la façon suivante :

1. On calcule $\widehat{\theta}$ l'estimateur des paramètres du modèle $\mathcal{M}_1$, et on extrait les coordonnées $\widehat{\theta}_{nuis}$ correspondant au paramètre θ_{nuis}.
2. On simule un échantillon (M, Y) sous le modèle $\mathcal{M}_0$ en prenant comme paramètre $\widehat{\theta}_{nuis}$ et pour X l'échantillon observé. On calcule la valeur de la statistique Λ_n.
3. On répète B fois l'étape 2.
4. On approche q_α par le quantile des B réalisations de Λ_n.

4.2.4 Modélisation associée à l'hypothèse 2

On considère le modèle de médiation décrit dans la figure 4.2 et on veut tester si ce modèle (c'est à dire l'ensemble des relations entre les variables définies dans le modèle) est modéré par le type d'organisation W (qui est binaire). Les modèles $[\mathcal{M}_0], [\mathcal{M}_1]$ associés sont donc :

$$[\mathcal{M}_0] : \begin{cases} M = & \theta_0^M + \theta_W^M W + \theta_1^M X_1 + \ldots + \theta_K^M X_K + \varepsilon_M \\ Y = & \theta_0^Y + \theta_W^M W + \theta_1^Y X_1 + \ldots + \theta_K^Y X_K + \theta_M^Y M + \varepsilon_Y \end{cases}$$

$$[\mathcal{M}_1] : \begin{cases} M = \theta_0^M + \theta_W^M W + (\theta_1^M + \theta_{1W}^M W)X_1 + \ldots + (\theta_K^M + \theta_{KW}^M W)X_K + \varepsilon_M \\ Y = \theta_0^Y + \theta_W^Y W + (\theta_1^Y + \theta_{1W}^Y W)X_1 + \ldots + (\theta_K^Y + \theta_{KW}^Y W)X_K + \\ (\theta_M^Y + \theta_{MW}^Y W)M + \varepsilon_Y \end{cases}$$

où $\varepsilon_M, \varepsilon_Y$ sont des variables gaussiennes de variances respectives σ_M^2 et σ_Y^2.

On teste l'hypothèse

$$\mathcal{H}_0 : \begin{cases} \theta_{1W}^Y = \ldots = \theta_{KW}^Y = \theta_{MW}^Y = 0 \\ \theta_{1W}^M = \ldots = \theta_{KW}^M = 0 \end{cases}$$

contre $\mathcal{H}_1$ l'un au moins de ces coefficients est non nul.

Pour la modélisation bayésienne on peut utiliser les G-priors présentées dans la sous-section 4.2.2 avec :

— Pour le modèle $[\mathcal{M}_0]$

$$\begin{aligned} \phi_M &= \left[\mathbb{1}, W, X_1, \ldots, X_K\right] \\ \phi_Y &= \left[\mathbb{1}, W, X_1, \ldots, X_K, M\right] \end{aligned}$$

— Pour le modèle $[\mathcal{M}_1]$

$$\begin{aligned} \phi_M &= \left[\mathbb{1}, W, X_1, WX_1, \ldots, X_K, , WX_K, \right] \\ \phi_Y &= \left[\mathbb{1}, W, X_1, WX_1, \ldots, X_K, WX_K, M, WM\right] \end{aligned}$$

4.3 Résultats et discussion

4.3.1 Hypothèse 1

Le diagramme 4.6 et le tableau 4.4 résument les résultats obtenus en utilisant la méthodologie préconisée par Hayes (2018). Les psychologues réalisent les modèles de régression sur les variables standardisées (c'est à dire centrées et réduites) ce qui leur permet de donner un poids relatif aux variables explicatives. Concernant les effets directs c'est le sens au travail qui a le plus grand impact positif sur l'engagement organisationnel, vient ensuite la participation aux décisions, les autres dimensions du leadership habilitant n'ayant pas

d'impact significatif. Pour ce qui concerne les effets indirects le sens et la confiance ont un effet indirect positif via le bien-être sur l'engagement organisationnel. Pour les effets directs on obtient des résultats légèrement inférieurs avec le modèle bayésien. Pour l'estimation des effets indirects présentés dans le tableau 4.4 on constate que les estimations classiques et bayésiennes sont similaires. L'inférence bayésienne donne cependant dans 7 cas sur 8 des intervalles de confiance plus étroits que le bootstrap avec Bias corrected.

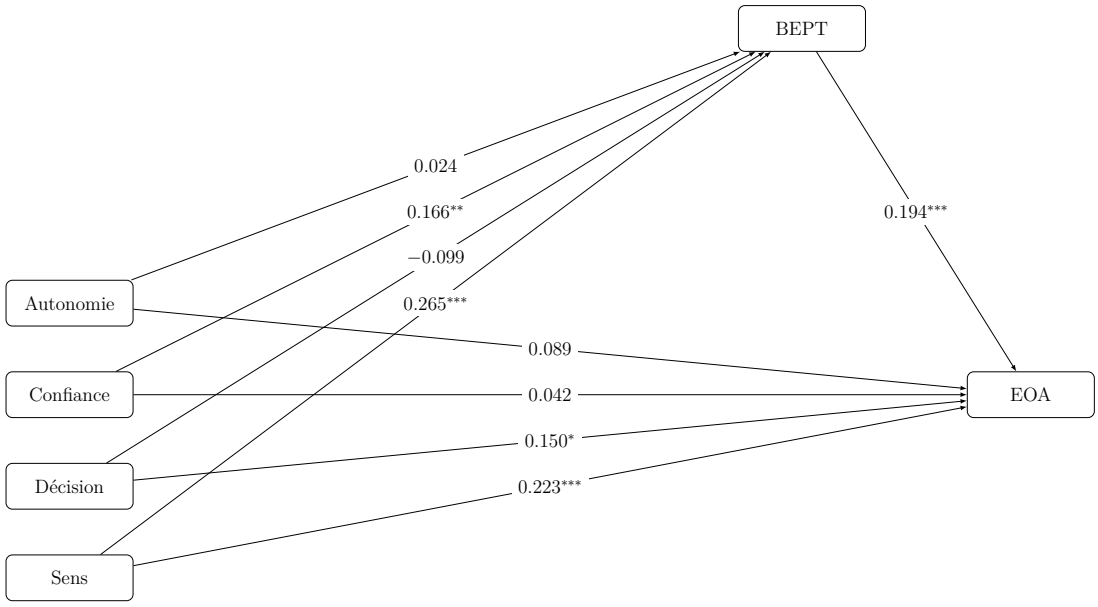


FIGURE 4.6 – Estimation des coefficients standardisés dans les deux modèles de régression (4.1 et 4.2) * désigne $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

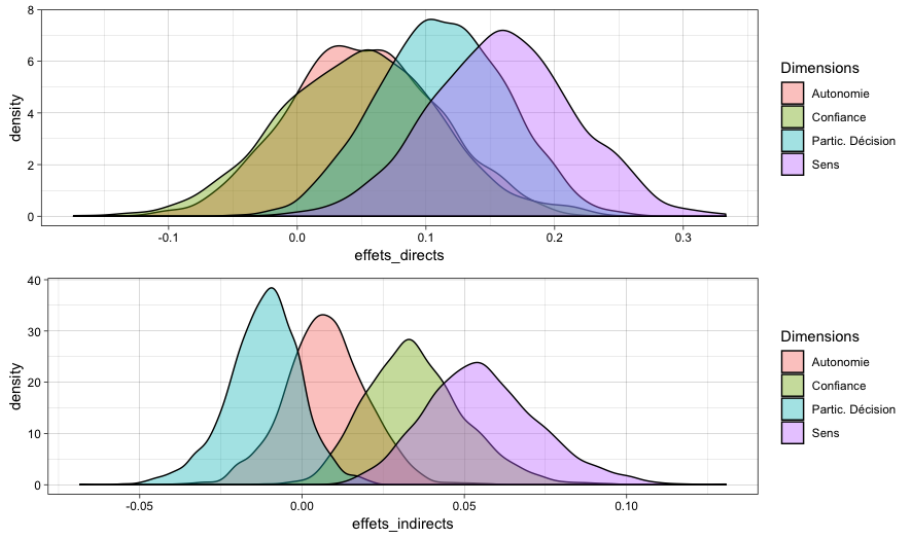


FIGURE 4.7 – Lois a posteriori des effets directs et indirects dans le modèle $\mathcal{M}_0$. Les effets directs n'ont pas été ici standardisés.

		Modèle bayésien			Bootstrap		
		estimate	Lower	Upper	estimate	Lower	Upper
Effets Directs	Sens	0.161	0.073	0.247	0.161	0.036	0.279
	Décision	0.111	0.031	0.193	0.112	0.014	0.208
	Confiance	0.048	-0.050	0.150	0.049	-0.077	0.172
	Autonomie	0.053	-0.043	0.148	0.051	-0.069	0.169
Effets Indirects	Sens	0.059	0.025	0.093	0.060	0.032	0.101
	Décision	0.041	-0.034	0.009	-0.012	-0.036	0.006
	Confiance	0.017	0.008	0.068	0.036	0.008	0.076
	Autonomie	0.019	-0.016	0.033	0.009	-0.016	0.038

TABLE 4.4 – Résumé des estimations des effets directs et indirects. Pour le bootstrap les intervalles de confiance ont été calculés avec la méthode Bias corrected préconisée dans Hayes (2018).

4.3.2 Hypothèse 2

On s'intéresse ici à l'effet modérateur de l'organisation sur le modèle précédent. La figure 4.8 illustre les estimations bayésiennes dans le modèle $[\mathcal{M}_1]$ dans lequel on a considéré que l'organisation modère les effets précédents. Les résultats du test sont donnés dans la table 4.5, au risque de 5 % on ne rejette pas l'hypothèse $\mathcal{H}_0$. Ainsi contrairement à ce qu'avaient envisagé les psychologues on n'a pas prouvé un effet modérateur de l'organisation sur le modèle de médiation.

	AIC	BIC	χ^2	Df	p
$[M_0]$	1636.85	1707.30			
$[M_1]$	1638.39	1746.14	16.45	9	0.0580

TABLE 4.5 – Résultats du test du rapport de vraisemblance et des critères de comparaison de modèles utilisés dans l'article.

4.3.3 Résultat du test basé sur le facteur de Bayes

La statistique de test $\Lambda_n = \log(BF_{10})$ est explicite avec la définition des modèles $[\mathcal{M}_0], [\mathcal{M}_1]$. Comme décrit dans la procédure du test nous commençons par estimer les paramètres $(\theta^M, \sigma_M^2, \theta^Y, \sigma_Y^2)$ sur l'échantillon global en utilisant le modèle $[\mathcal{M}_1]$. Les résultats obtenus sont consignés dans la table 4.6. On utilise pour $\widehat{\theta}_{nuis}$ les 6 premières coordonnées de la première ligne et les 5 de la deuxième ligne, et $\widehat{\sigma}_Y = 0.77, \widehat{\sigma}_M = 0.43$. On simule B réplications de l'échantillon. La figure 4.9 donne l'estimation de la distribution de Λ_n.

	$\mathbb{1}$	X_1	X_2	X_3	X_4	M	W	X_1W	X_2W	X_3W	X_4W	MW
θ^Y	0.349	0.235	0.121	0.095	0.144	0.233	-0.134	-0.118	-0.048	-0.059	-0.156	0.242
θ^M	3.174	0.167	-0.030	-0.018	0.100	–	-0.107	-0.033	-0.001	0.067	-0.013	–

TABLE 4.6 – Estimation des paramètres dans le modèle $[\mathcal{M}_1]$

Règle de décision : Le quantile estimé est $q_\alpha = -8.547$. On rejette $\mathcal{H}_0$ au risque α si

$$\log(BF_{10}) > -8.547$$

Etude de la puissance du test

Pour étudier la puissance du test on simule successivement selon le modèle $[M_1]$ des échantillons en fonction de $\delta \in \{0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3\}$:

— Un coefficient non nul parmi $(\theta^Y_{1W}, ..., \theta^Y_{1W}, \theta^Y_{MW})$ égal à δ et un parmi $(\theta^M_{1W}, ..., \theta^M_{1W})$ égal à δ.

— Deux coefficients non nuls parmi $(\theta^Y_{1W}, ..., \theta^Y_{1W}, \theta^Y_{MW})$ égaux à δ et deux parmi $(\theta^M_{1W}, ..., \theta^M_{1W})$ égaux à δ.

— ...

La figure 4.10 illustre la puissance empirique du test. On constate que la puissance du test augmente en fonction de δ quel que soit le nombre de coefficients non nuls ajoutés dans $[\mathcal{M}_1]$. On constate également que pour δ donné, la puissance augmente en fonction du nombre de coefficients ajoutés.

Retour sur l'hypothèse de l'article

On a $\Lambda_n = \log(BF_{10}) = -8.635$ et donc $p = .057$. La p-value du test est obtenue en utilisant l'estimation de la fonction de répartition $\widehat{F}_{\Lambda_n}$ de λ_n sous $\mathcal{H}_0$ (figure 4.9)

$$p = 1 - \widehat{F}_{\Lambda_n}(-8.635)$$

On obtient ainsi la même conclusion qu'en utilisant le test du rapport de vraisemblance (table 4.5).

Retour sur l'utilisation des l'échelle d'évidence

On a $\widehat{q}_{95\%} = -8.547$, on rejette donc $\mathcal{H}_0$ dès que $\log(BF_{10}) > -8.547$. Pour les échelles Jeffreys (1961); Kass and Raftery (1995), on a une évidence décisive pour $\mathcal{H}_0$ contre $\mathcal{H}_1$ pour les valeurs $\log(BF_{10}) < -2$. Les décisions sont en forte contradiction pour $\log(BF_{10}) \in]-8.547, -2[$. La figure 4.11 illustre le manque de puissance de la procédure lorsque l'on utilise les échelles. Sur l'exemple considéré, il faut que $\delta > 2$ pour que les échelles d'évidence détectent dans 75% des cas que le modèle 1 a une plus grande évidence que le modèle 0, alors que la puissance du test est égale à 1.

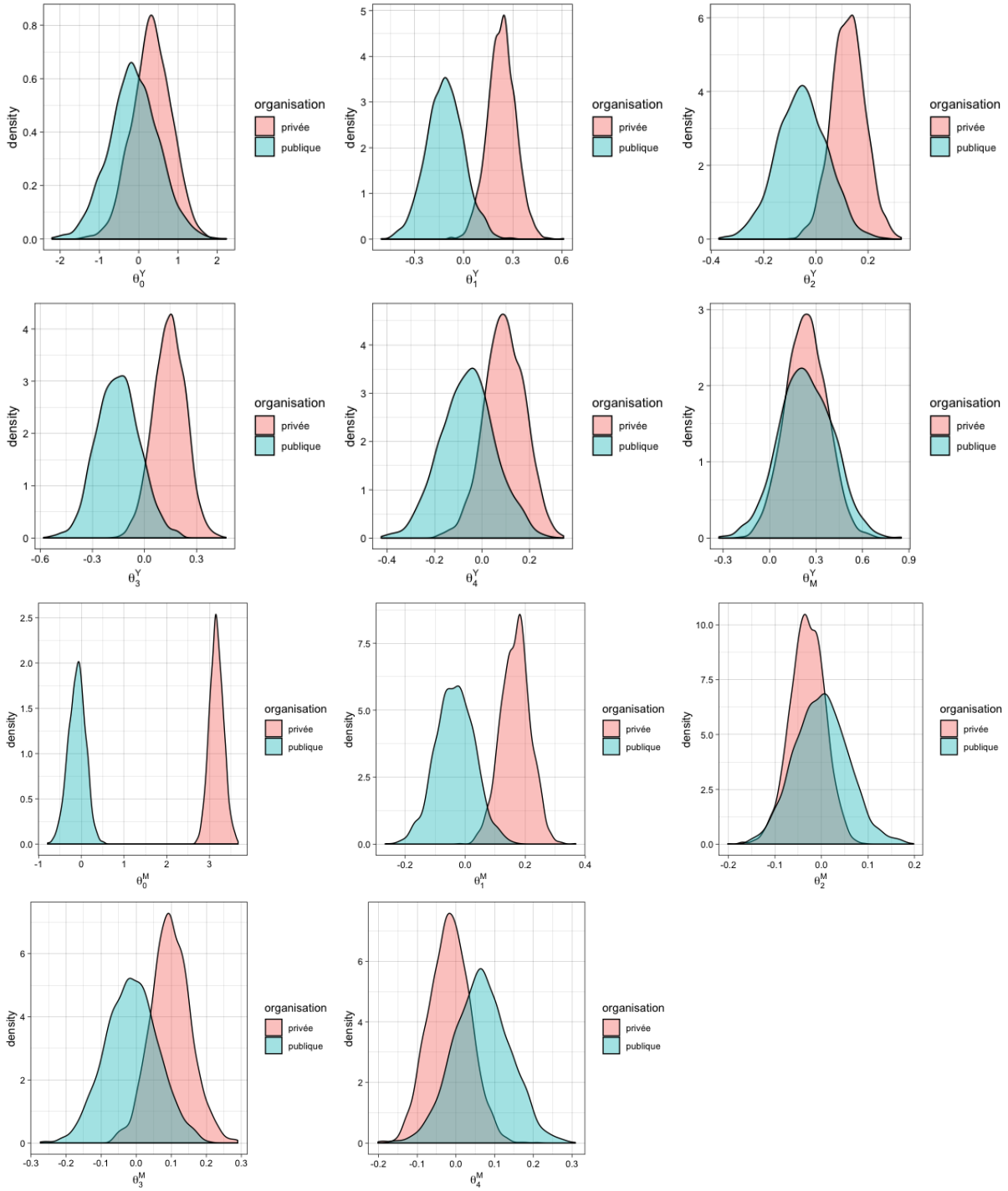


FIGURE 4.8 – Lois a posteriori des coefficients θ^Y et θ^M dans le cas du modèle à coefficients individuels selon la structure (modèle $[\mathcal{M}_1]$)

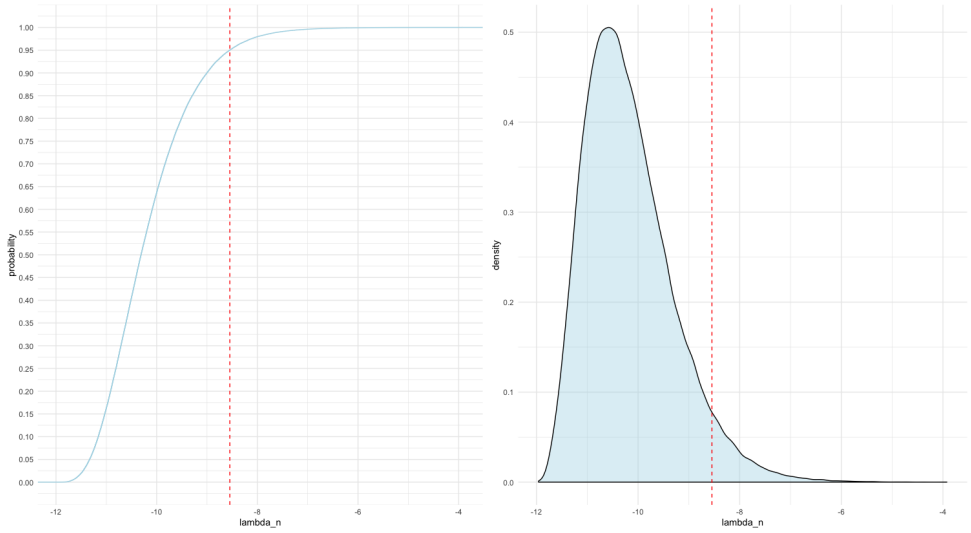


FIGURE 4.9 – A gauche estimation de la fonction de répartition de Λ_n sous $\mathcal{H}_0$ et à droite sa densité estimée sous $\mathcal{H}_0$. Le trait rouge en pointillés correspond au quantile empirique à 5%.

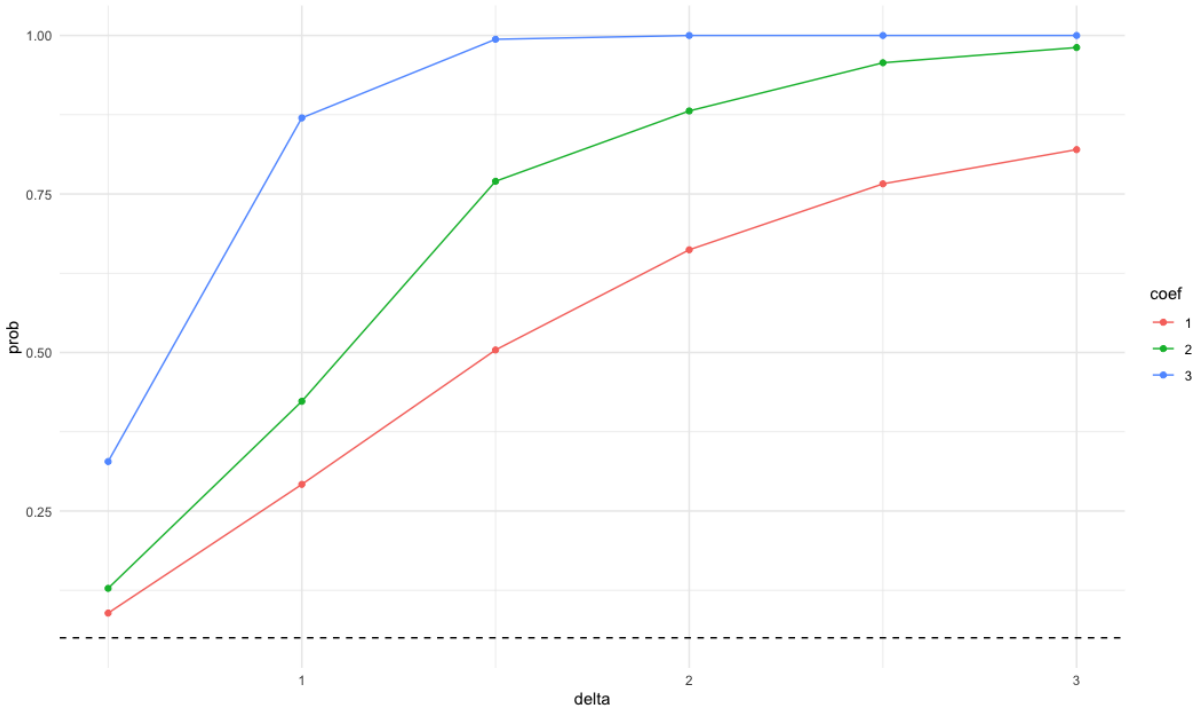


FIGURE 4.10 – Probabilité empirique de rejeter $\mathcal{H}_0$ lorsqu'elle est fausse. Le trait horizontal en pointillés représente le niveau de significativité $\alpha = 0.05$

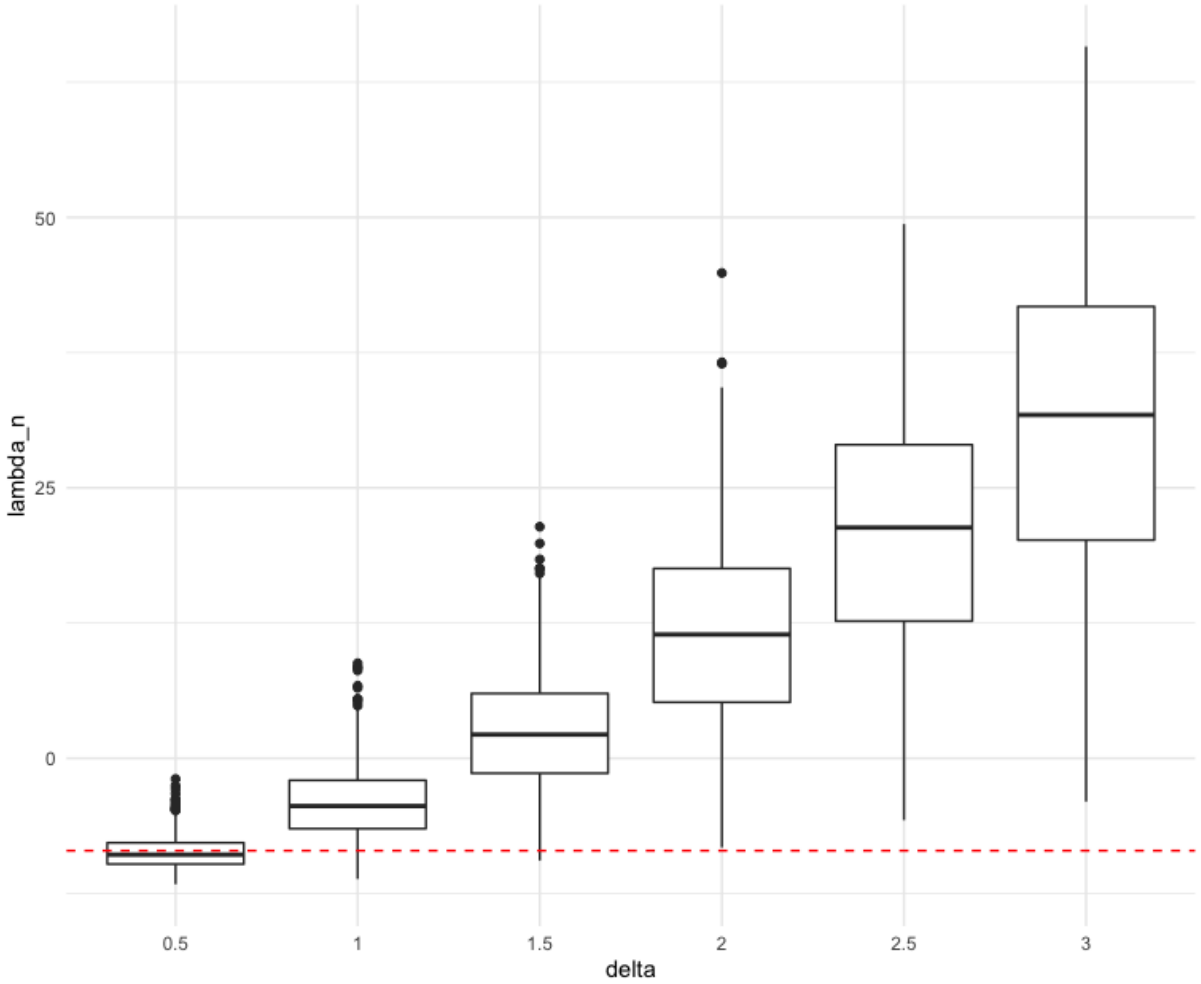


FIGURE 4.11 – Boxplot de Λ_n en fonction de δ où les données sont simulées dans le modèle $\mathcal{M}_1$ $\theta^Y_{1,W} = ... = \theta^Y_{4,W} = \theta^M_{1,W}, ..., \theta^M_{3,W} = \delta$. La ligne en pointillés représente le quantile estimé $\widehat{q}_\alpha$ de Λ_n

Chapitre 5

Médiation à variable d'exposition ordinale

Cette étude a été initiée par André Ndobo (Professeur de Psychologie Sociale, LPPL) et Alice Faure (psychologue du Travail) dans le cadre de son doctorat. Cette étude porte sur les conséquences néfastes du cumul de discriminations sur l'estime de soi et examine les options d'adaptation des personnes appartenant à des groupes plus stigmatisés. Les psychologues considèrent que dans l'étude il y a trois sources de discrimination possible : l'âge (sénior vs jeune), le statut professionnel (chômeur vs employé) et enfin le sexe (femme vs homme). La variable d'exposition pour répondre à la question de l'effet cumulatif des discriminations sera ordinale. Par options d'adaptation (ou stratégie de coping) on entend que les individus vont se protéger de ces discriminations à travers certains mécanismes psychologiques. Dans cette étude, deux types de stratégies de coping ont été mesurées : l'identification à son groupe d'âge et l'engagement vis à vis de l'entreprise qui a deux dimensions : engagement affectif et engagement professionnel. Ces deux variables sont supposées être plus protectrices au niveau de l'estime de soi pour les gens qui souffrent d'un cumul de discrimination. On suppose également que l'effet néfaste du cumul des discriminations va transiter par une plus grande perception de la discrimination qui aura à son tour un effet néfaste sur l'estime de soi. Comme pour ce qui concerne le chapitre 4, nous allons présenter le contexte et les objectifs et la méthodologie utilisée. Dans un second temps, nous proposerons une modélisation bayésienne alternative.

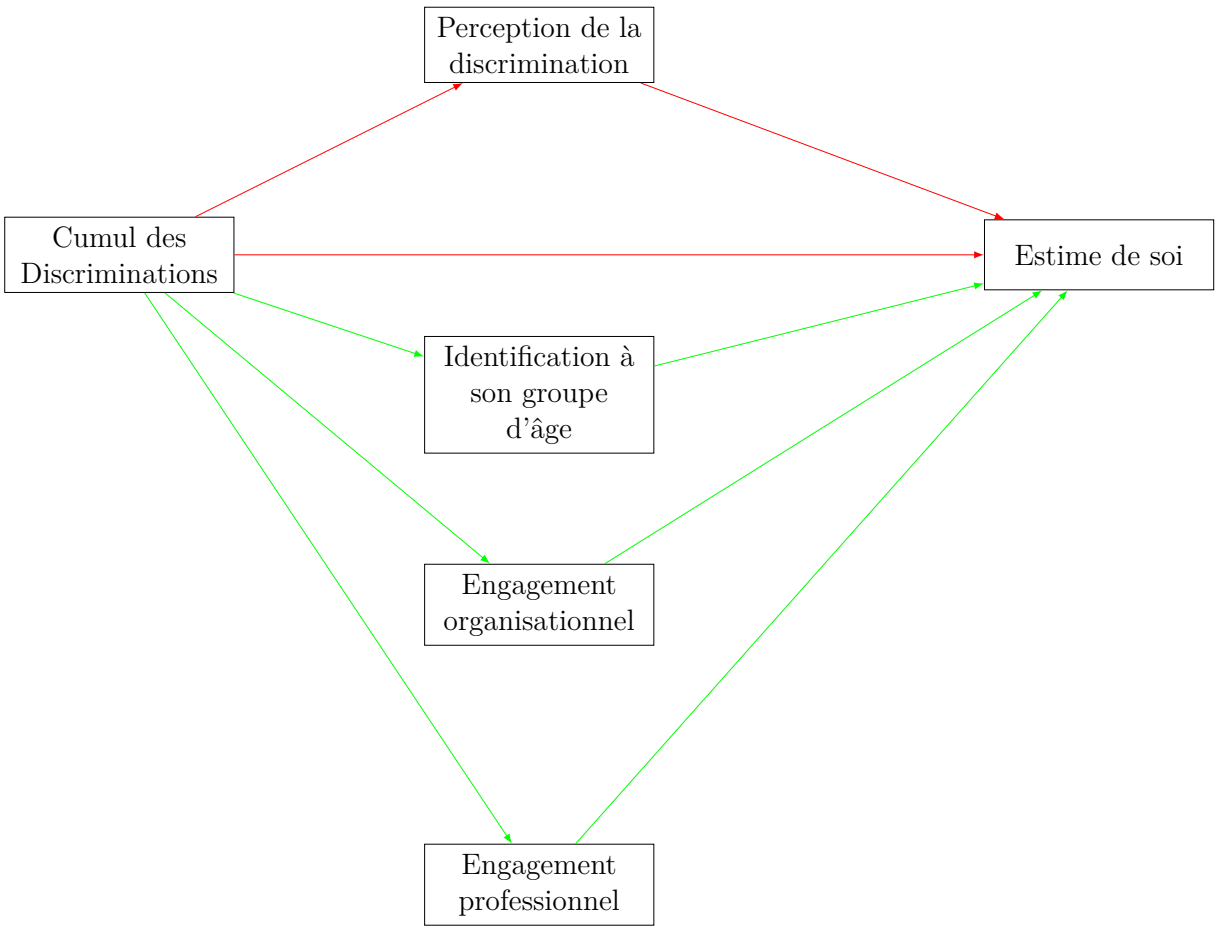


FIGURE 5.1 – Modèle théorique envisagé. Les liens négatifs (respectivement positifs) sont indiqués en rouge (respectivement en vert).

5.1 Contexte de l'étude et objectif

5.1.1 Contexte de l'étude

Participants : L'étude a porté sur $N = 422$ participants contactés par email, par des forums et des associations d'aide à la réinsertion de sénior dans le monde professionnel. Puisque l'échantillon contient des employers et des chercheurs d'emploi, certains items ont été reformulés pour s'adapter à ces deux situations différentes. Le recueil de données à eu lieu durant le premier semestre de l'année 2017.

Outils : Les variables d'intérêt ont été mesurées à l'aide des questionnaires validés suivants :

— La perception de la discrimination due à l'âge (PAD :Perceived age discrimination) est mesurée par quatre items issus de Redman and Snape (2006) (exemple d'item : "Mon âge m'empêche d'obtenir des emplois pour lesquels je pense être qualifié"). La cohérence interne du questionnaire sur l'échantillon considéré est correcte ($\bar{r} = .25$ [1]).

— L'estime de soi au travail (Self-esteem) est mesuré en utilisant les quatre items extraits de l'échelle de Petersen (1965) correspondant à la dimension négative de l'estime de soi (par exemple "au travail et en général je suis satisfait de qui je suis"). La cohérence interne est également correcte ($\bar{r} = .40$).

— L'engagement affectif au travail (AC : affective commitment, $\bar{r} = .57$) est mesuré en utilisant 3 items du questionnaire de Allen and Meyer (1990) (par exemple "Cette organisation a une grande signification personnelle pour moi"). On remarque que pour cette variable, $\bar{r}$ est élevé ce qui indique une redondance dans les items.

— L'engagement professionnel (PC : professional commitment, $\bar{r} = .27$) est mesuré avec 3 items extraits de Allen and Meyer (1990) (par exemple "Il serait très difficile pour moi de quitter mon entreprise").

— L'identification à son groupe d'âge ($\bar{r} = .26$) a été évalué en utilisant l'échelle en 5 points de Garstka et al. (2004) (par exemple "J'apprécie d'appartenir à mon groupe d'âge").

Analyse descriptive : La table 5.1 donne les premiers résultats. La répartition des individus en fonction du nombre de discriminations dont ils peuvent être victimes est assez déséquilibrée. Les résultats suggèrent que le cumul des discriminations a bien un impact négatif sur l'estime de soi et sur l'engagement affectif (cf résultat des différentes ANOVA : F de Fisher table 5.1). De plus, le cumul des discriminations accentue la perception de la discrimination par l'âge. L'engagement organisationnel affectif est protecteur pour les personnes cumulant les discriminations contrairement à l'engagement professionnel qui est plus protecteur pour les individus ne cumulant pas les discriminations.

5.1.2 Objectifs de l'étude

L'hypothèse de recherche a été décrite dans l'introduction.

1. Lorsque la variable est mesurée par moins de 5 items on utilise $\bar{r}$ (average inter-item corrélation) au lieu de l'alpha de Cronbach (voir Briggs and Cheek, 1986). Ces auteurs considèrent qu'une valeur $.20 < \bar{r} < .50$ indiquent une bonne cohérence de l'échelle.

TABLE 5.1 – Marginal Means and frequency by discrismination. PAD designate perception age discrimination, PC professional commitment, AC affective commitment and AGI age group identification.

disc	Frequency	self-esteem	PAD	PC	AC	AGI
0	32	5.555	2.391	3.729	4.240	4.96
1	124	5.734	2.613	4.081	4.167	5.09
2	166	5.119	3.276	4.195	4.163	4.85
3	100	4.692	3.460	4.670	4.777	5.02
F de Fisher	–	9.53***	12.28***	3.90***	2.82***	1.08

Hypothèse On veut montrer que le fait de cumuler les discriminations a un effet direct négatif sur l'estime de soi ; que le fait de plus s'identifier à son groupe d'âge et le fait de plus s'engager professionnellement ont un rôle médiateur protecteur de l'estime de soi. Par contre la discrimination perçue aura un rôle médiateur négatif sur l'estime de soi. Ces hypothèses sont résumées dans la figure 5.1.

5.2 Modélisation statistique

La réalisation de la modélisation de ce problème requiert de définir :

— le modèle de médiation dans la cas d'une variable d'exposition catégorielle,

— la définition de contrastes qui nous permettront de faire les comparaisons induites par l'hypothèse,

— le modèle de médiation ayant plusieurs médiateurs indépendants.

5.2.1 Modèle linéaire à variable explicative catégorielle

D'un point de vue statistique, le modèle liant un médiateur continu M à X est un modèle d'ANOVA à un facteur et le modèle liant la variable réponse continue Y aux variables X, M est un modèle ANCOVA à un facteur.

Modèle de régression associé à l'ANOVA : Soient $x_1, \ldots, x_K$ les K modalités de X, n_k l'effectif de chacune de ces catégories x_k, et $N = n_1 + ... + n_K$. Soit $\mathbb{X} := [\mathbb{1}_{x_1}, ..., \mathbb{1}_{x_K}]$ la matrice (N, K) de design associée à la variable X. La matrice $\mathbb{X}$ est une matrice dont les colonnes sont deux à deux orthogonales et on a $\mathbb{X}'\mathbb{X} = diag(n_1, ..., n_K)$.

Le modèle associé au médiateur M (modèle d'ANOVA à un facteur) de paramètres $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_K)$ est :

$$M = \mathbb{X}\mu + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim \mathcal{N}_N(, \sigma^2 I_N) \tag{5.1}$$

Dans le cas du premier paramétrage, l'estimateur des moindres carrés (qui coincide avec le maximum de vraisemblance) est $\widehat{\mu} = (\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_K)$. Contrairement aux hypothèses du modèle linéaire, la constante ne fait pas partie des variables explicatives car celle-ci est linéairement liée aux variables $\mathbb{1}_{x_1}, ..., \mathbb{1}_{x_K}$ par la relation $\mathbb{1}_N = \sum_{k=1}^K \mathbb{1}_k$. On peut toutefois reparamétrer le modèle en modifiant la matrice de design en conséquence. Par exemple, soit le vecteur $\theta = (\theta_0, \theta_1, ..., \theta_{K-1})$ associé à la matrice de design $\mathbb{X}_A = [\mathbb{1}_N, \mathbb{1}_{x_2}, ..., \mathbb{1}_{x_K}]$. Les coefficients θ_k ($k \in \{1, ..., K-1\}$) s'interprètent comme la différence entre la catégorie x_{k+1} et la catégorie x_1 qui a été choisie comme catégorie de référence. Ainsi on a fait un changement de variable (linéaire) pour que la matrice de design s'écrive sous la forme

$$\mathbb{X}_A = [\mathbb{1}_N, \mathbb{X}A] = \mathbb{X}[\mathbb{1}_K, A],$$

où $A \in \mathbb{R}^{K\times(K-1)}$ telle que $B := [\mathbb{1}_K, A]$ est de rang K (donc inversible). On définit

$$\theta := B^{-1}\mu. \tag{5.2}$$

Ce vecteur est solution de (5.1) associé à la matrice de design $\mathbb{X}_A$.

Contrastes : En pratique, il est fréquent que l'on ne soit pas intéressé par les coefficients en soit mais plutôt par leur différence, ou bien toute autre combinaison linéaire de ceux-ci.

Definition 5.2.1. *Une matrice $C \in \mathbb{R}^{K\times(K-1)}$ de rang $(K-1)$ dont toutes les colonnes sont orthogonales au vecteur $\mathbb{1}_K$ est appelée matrice de contrastes.*

L'utilisation de la matrice de contraste C permet d'avoir l'équivalence

$$\mu_1 = ... = \mu_K \Longleftrightarrow \theta_1 = ... = \theta_{K-1} = 0. \tag{5.3}$$

Par exemple, si le practicien est intéressé par la comparaison des modalités adjacentes x_{k+1} et x_k de X ($k \in \{1, ..., K-1\}$), on utilise la matrice de contrastes associée à

$$\mathbb{X}_C = \Big[\mathbb{1}_N, \mathbb{1}_{X=x_2} - \mathbb{1}_{X=x_1}, \ldots, \mathbb{1}_{X=x_K} - \mathbb{1}_{X=x_{K-1}}\Big].$$

Les comparaisons souhaitées seront alors obtenues en testant $\theta_k = 0$.

5.2.2 Modèle de médiation à variable d'exposition catégorielle : Effets directs et indirects relatifs

Les notions présentées dans cette sous-section sont extraites de Hayes and Preacher (2014). Considérons un modèle de médiation simple (X, M, Y) avec X catégorielle et supposons que M, Y sont continues. Le modèle de médiation s'écrit sous la forme du modèle linéaire :

$$\begin{cases} M = \mathbb{X}_C \theta^M + \varepsilon_M, & \varepsilon_M \sim \mathcal{N}_N(0, \sigma_M^2 I_N) \\ Y = \mathbb{X}_C \theta^Y + \theta_M^Y M + \varepsilon_Y, & \varepsilon_Y \sim \mathcal{N}_N(0, \sigma_Y^2 I_N) \end{cases}$$

où $\theta^\bullet = (\theta_0^\bullet, ..., \theta_{K-1}^\bullet)$ et C est une matrice de paramétrage définie par (5.2).

Considérons de nouveau l'exemple $\mathbb{X}_A = [\mathbb{1}_N, \mathbb{1}_{X=x_2}, ..., \mathbb{1}_{X=x_K}]$. Dans ce paramétrage, le coefficient θ_k^Y $(k \in \{2, ..., K\})$ définit l'effet direct relatif de X sur Y entre x_k et x_1. L'effet indirect relatif de X sur Y entre les modalités x_1 et x_k est $\theta_M^Y \theta_k^M$.

Comme dans le modèle linéaire à variable explicative X continue, si $Y = \mathbb{X}_C \psi + \varepsilon'_Y$, $\varepsilon'_Y \sim \mathcal{N}_N(0, (\sigma'_Y)^2 I_N)$ alors

$$\psi_k = \theta_k^Y + \theta_M^Y \theta_k^M$$

Par ailleurs, d'après (5.3), le test sur les coefficients est indépendant du paramétrage choisi. L'existence d'effets relatifs ne dépend donc pas du paramétrage choisi.

5.2.3 Retour à l'hypothèse de recherche

Dans notre étude la variable d'exposition considérée est ordinale et nous voulons analyser l'effet du cumul des discriminations c'est à dire que nous voulons réaliser les comparaisons suivantes :

— les individus souffrant d'une discrimination contre ceux n'en ayant pas,

— les individus souffrant de 2 discriminations contre ceux en ayant 1,

— les individus souffrant de 3 discriminations contre ceux en ayant 2.

Pour ce faire, on va définir un contraste correspondant aux trois comparaisons décrites ci-dessus.

On note dans la suite $\mathcal{M} := (C_1, C_2, C_3, M_1, ..., M_4, Y)$ le modèle décrit par la figure 5.1 avec $C_k = \mathbb{1}_{X=x_k} - \mathbb{1}_{X=x_{k-1}}$. Dans le problème considéré les médiateurs $M_1, ..., M_4$ et

la variable Y sont continus. On considère le modèle linéaire associé à $\mathcal{M}$ est :

$$\begin{aligned} M_i &= \mathbb{X}_C\theta^{M_i} + \varepsilon_{M_i}, \quad \varepsilon_{M_i} \sim \mathcal{N}_N(0, \sigma^2_{M_i}),\ i \in \{1, ...4\} \\ Y &= \mathbb{X}_C\theta^Y + \sum_{i=1}^{4} \theta^Y_{M_i} M_i + \varepsilon_Y, \quad \varepsilon_Y \sim \mathcal{N}_N(0, \sigma^2_Y I_N) \end{aligned}$$

Dans le contexte du modèle linéaire si on regarde l'effet total de C relativement au contraste C_1 on a :

$$\psi_1 = \theta^Y_1 + \sum_{i=1}^{4} \theta^Y_{M_i}\theta^{M_i}_1$$

où $Y = \psi_0 + \psi_1 C_1 + \psi_2 C_2 + \psi_3 C_3 + \varepsilon'_Y$.

Remark 5.2.2. *Pour un modèle à plusieurs médiateurs, différentes stratégies peuvent être envisagées : soit on considère un modèle à médiateurs parallèles (c'est le cas ici), soit on considère un modèle avec des liens entre les médiateurs*[2]*. Le choix de l'un de ces deux types de modélisations dépend de l'hypothèse de recherche et incombe à l'expert.*

5.3 L'alternative bayésienne

5.3.1 $G-$prior pour variable exogène catégorielle

Le $G-$prior du vecteur μ est :

$$\mu \sim \mathcal{N}_K(0, g\sigma^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1})$$

où $(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1} = diag\left(\frac{1}{n_1} ... \frac{1}{n_K}\right)$.

Soit $\theta = C\mu$ un autre paramétrage du modèle considéré. Si $\mu \sim \mathcal{N}_K(0, g\sigma^2(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1})$, alors

$$\theta = C\mu \sim \mathcal{N}_K(0, g\sigma^2 C(\mathbb{X}'\mathbb{X})^{-1}C'),$$

et, par suite

$$\theta \sim \mathcal{N}_K(0, g\sigma^2(\mathbb{X}'_C\mathbb{X}_C)^{-1}).$$

Ainsi, quel que soit le paramétrage choisi, le choix des $G-$priors permet d'avoir une loi a priori invariante.

2. Un exemple de cette modélisation est présentée dans l'annexe C

5.3.2 Modélisation du problème

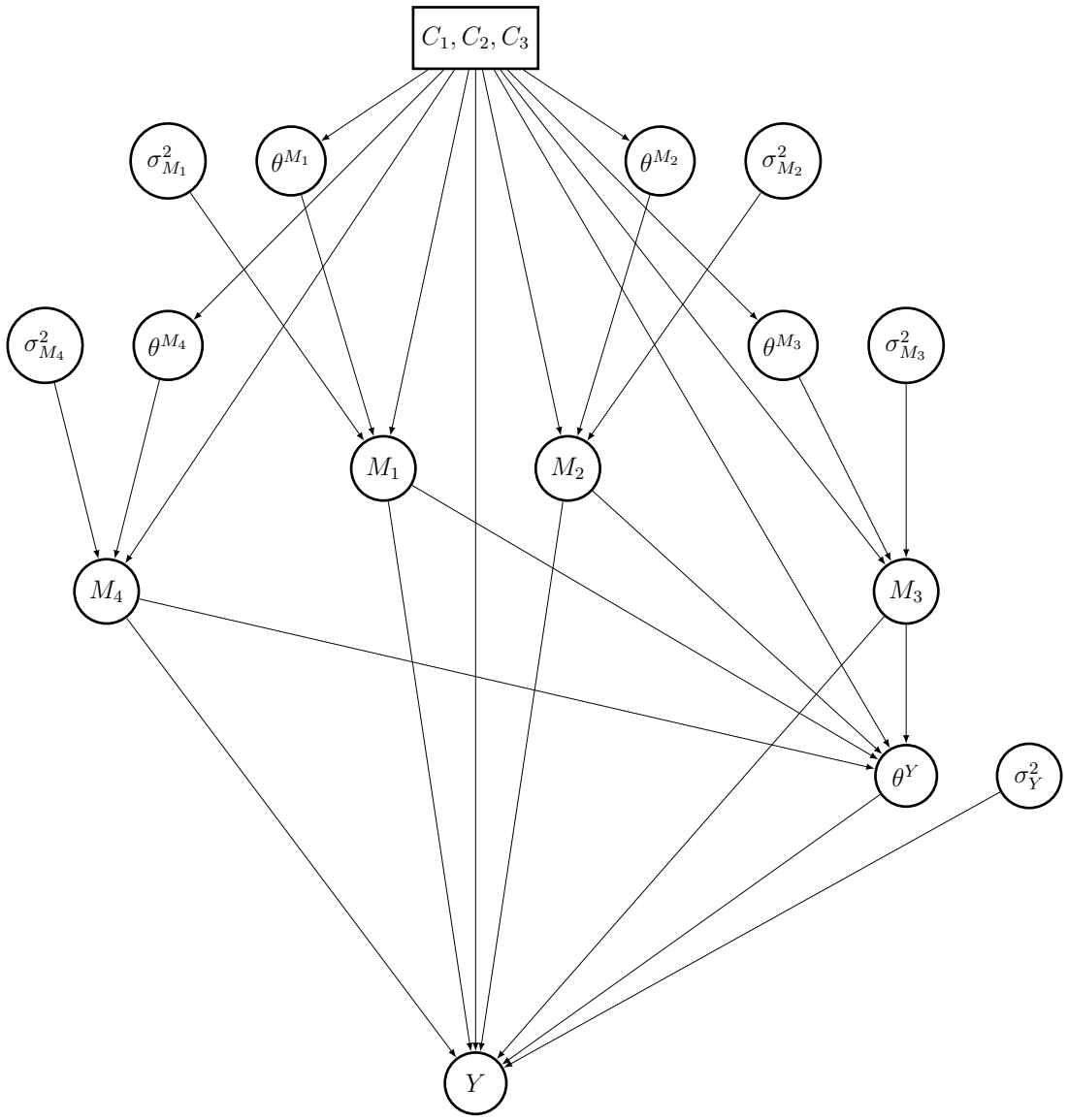


FIGURE 5.2 – DAG pour le modèle de médiation

On va utiliser la même stratégie que dans le chapitre précédent. On va adapter les $G-$priors au modèle décrit par le DAG Figure 5.2.

Soit $\theta := (\theta^{M_1}, \sigma^2_{M_1}, ..., \theta^{M_4}, \sigma^2_{M_4}, \theta^Y, \sigma^2_Y)$ où $\theta^{M_i} = (\theta_0^{M_i}, \ldots, \theta_3^{M_i})$. On écrit la loi jointe

du modèle conditionnellement à C_1, C_2, C_3 :

$$\begin{aligned} p(M_1, ..., M_4, Y, \theta | C_1, C_2, C_3) = & p(Y | C_1, C_2, C_3, M_1, ..., M_4, \theta^Y, \sigma_Y^2) \times \\ & p(\theta^Y | C_1, C_2, C_3, M_1, ..., M_4, \sigma_Y^2) p(\sigma_Y^2) \times \\ & \prod_{i=1}^{4} p(M_i | C_1, C_2, C_3, \theta^{M_i}, \sigma_{M_i}^2) p(\theta^{M_i} | C_1, C_2, C_3, \sigma_{M_i}^2) p(\sigma_{M_i}^2) \end{aligned}$$

où :

— $p(Y|C_1, C_2, C_3, M_1, ..., M_4, \theta_Y, \sigma_Y^2)$ et pour $i \in \{1, ...4\}$, $p(M_i|C_1, C_2, C_3, \theta_{M_i}, \sigma_{M_i}^2)$ sont données respectivement par (4.1) et (4.2)

— Pour $p(\sigma_{M_i}^2)$ et $p(\sigma_Y^2)$ on choisit $p(\sigma_\bullet^{-2}) \propto \sigma_\bullet^{-2}$

— Pour $p(\theta^Y | C_1, C_2, C_3, M_1, ..., M_4, \sigma_Y^2)$ on adapte le $G-$prior :

$$\theta^Y | C_1, C_2, C_3, M_1, ..., M_4, \sigma_Y^2 \sim \mathcal{N}_8(0_8, N\sigma_Y^2 (\phi_Y' \phi_Y)^{-1})$$

où $\phi_Y = \left[\mathbb{1}, C_1, C_2, C_3, M_1, ..., M_4\right]$

— De même pour $p(\theta^{M_i} | C_1, C_2, C_3, \sigma_{M_i}^2)$ on adapte également le $G-$prior

$$\theta^{M_i} | C_1, C_2, C_3, \sigma_{M_i}^2 \sim \mathcal{N}_4(0_4, N\sigma_{M_i}^2 (\phi_{M_i}' \phi_{M_i})^{-1})$$

où $\phi_{M_i} = \left[\mathbb{1}, C_1, C_2, C_3\right]$.

5.4 Résultats et discussion

La figure 5.3 résume les résultats obtenus avec le modèle linéaire. On constate que la plupart des liens supposés sont significatifs, seul le médiateur M_4 (identification au groupe d'âge) n'a pas de lien ni avec le cumul des discriminations ni avec l'estime de soi. Les tables 5.2, 5.3 et la figure 5.4 résument les effets directs et indirects relatifs dans les deux modèles. On constate que les résultats des deux méthodologies (classique et alternative bayésienne) sont proches pour tous ces paramètres. Les intervalles de confiance fournis par les deux approches sont légèrement différents et contrairement à l'application 1 les intervalles bayésiens ne sont plus courts que dans 50% des cas. L'échantillon considéré est grand ce qui peut expliquer que ces intervalles soient proches. De plus, nous ne possédions pas d'information a priori sur les liens étudiés donc nous avons utilisé des lois non informatives. Par contre, en cas d'étude antérieure nous aurions pu suivre la méthodologie de Launay et al. (2015) pour inclure cette information au niveau des lois a priori et ainsi améliorer les longueurs des intervalles de crédibilité.

Type	stigmat.	mean	sd	z	pvalue	ci_lower	ci_upper
	1 vs 0	-0.090	0.206	-0.437	0.662	-0.489	0.303
relative direct effect	2 vs 1	-0.466	0.181	-2.570	0.010	-0.815	-0.105
	3 vs 2	-0.433	0.138	-3.135	0.002	-0.707	-0.164
	1 vs 0	-0.135	0.056	-2.424	0.015	-0.254	-0.037
relative indirect effect via PAD	2 vs 1	-0.217	0.063	-3.437	0.001	-0.357	-0.106
	3 vs 2	-0.132	0.044	-3.011	0.003	-0.228	-0.057
	1 vs 0	0.017	0.042	0.399	0.690	-0.065	0.103
relative indirect effect via AC	2 vs 1	0.043	0.038	1.133	0.257	-0.022	0.123
	3 vs 2	0.070	0.035	1.983	0.047	0.013	0.149
	1 vs 0	-0.078	0.046	-1.677	0.093	-0.177	-0.003
relative indirect effect via PC	2 vs 1	-0.093	0.045	-2.065	0.039	-0.196	-0.018
	3 vs 2	-0.088	0.039	-2.248	0.025	-0.175	-0.022
	1 vs 0	0.002	0.015	0.137	0.891	-0.027	0.035
relative indirect effect via AGI	2 vs 1	-0.005	0.013	-0.384	0.701	-0.038	0.018
	3 vs 2	0.003	0.010	0.274	0.784	-0.016	0.026

Table 5.2 – Résultats obtenus en utilisant le modèle bayésien avec 4 chaines de Markov et 1000 itérations.

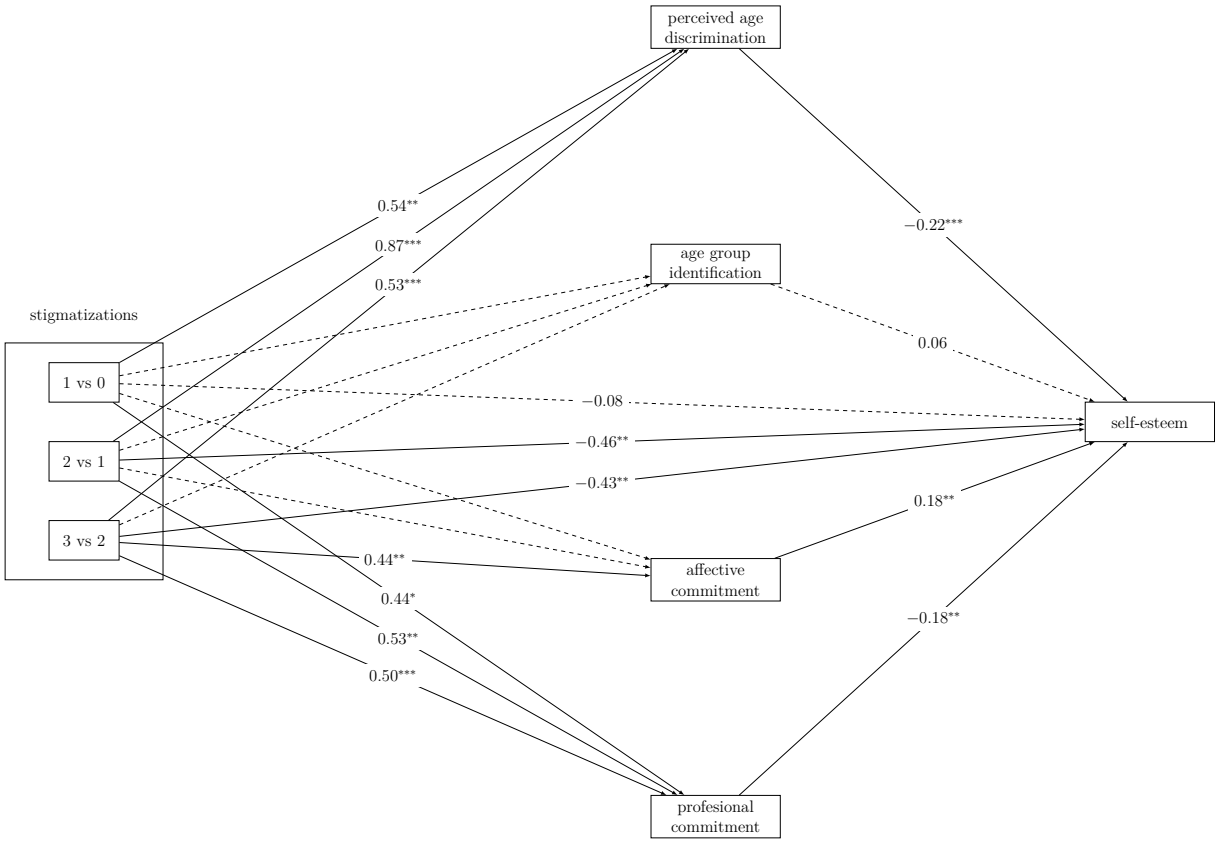


FIGURE 5.3 – Estimation des liens du modèle théorique. Les lignes en pointillés correspondent aux liens non significatifs. * désigne $p < .05$, ** $p < .01$, *** $p < .001$

		mean	sd	z	pvalue	ci_lower	ci_upper
	1 vs 0	-0.0818	0.1650	-0.4955	0.6202	-0.380	0.2674
relative direct effect	2 vs 1	-0.4636	0.1645	-2.8183	0.0048	-0.787	-0.1361
	3 vs 2	-0.4343	0.1507	-2.8811	0.0040	-0.741	-0.1447
	1 vs 0	-0.1383	0.0535	-2.5849	0.0097	-0.262	-0.0456
relative indirect effect via PAD	2 vs 1	-0.2201	0.0591	-3.7224	0.0002	-0.355	-0.1179
	3 vs 2	-0.1335	0.0411	-3.2451	0.0012	-0.233	-0.0661
	1 vs 0	0.0153	0.0378	0.4047	0.6857	-0.051	0.1051
relative indirect effect via AC	2 vs 1	0.0421	0.0362	1.1628	0.2449	-0.014	0.1344
	3 vs 2	0.0695	0.0366	1.8975	0.0578	0.016	0.1648
	1 vs 0	-0.0761	0.0432	-1.7616	0.0781	-0.191	-0.0125
relative indirect effect via PC	2 vs 1	-0.0913	0.0430	-2.1233	0.0337	-0.201	-0.0267
	3 vs 2	-0.0868	0.0377	-2.3035	0.0212	-0.180	-0.0279
	1 vs 0	0.0012	0.0137	0.0848	0.9324	-0.020	0.0436
relative indirect effect via AGI	2 vs 1	-0.0056	0.0130	-0.4291	0.6679	-0.049	0.0093
	3 vs 2	0.0026	0.0101	0.2527	0.8005	-0.009	0.0374

TABLE 5.3 – Résultats obtenus en utilisant le bootstrap Hayes (2018) avec $B = 5000$ réplications.

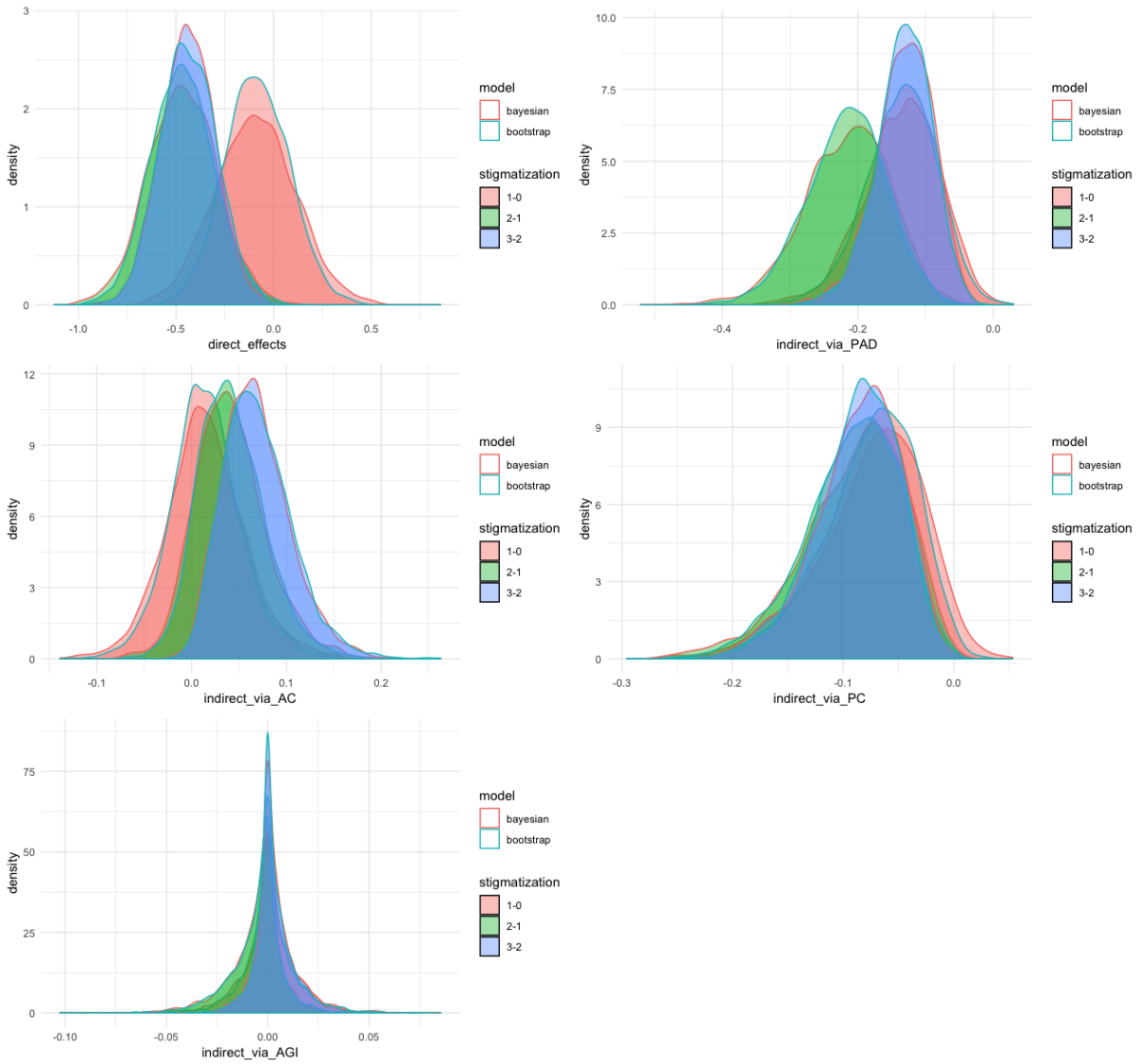


FIGURE 5.4 – Lois a posteriori des paramètres du modèle dans le modèle bayésien et estimation de la loi des paramètres par bootstrap.

Chapitre 6

Detection of outliers with a Bayesian hierarchical model : application to the single-grain luminescence dating method.

6.1 Introduction

Optically Stimulated luminescence (0SL) is used to date the last exposure of grains extracted from sediments to sunlight. It is quite common that the sample contains poorly bleached grains, that is grains were not sufficiently exposed to light to fully reset. For such a grain the OSL method will provide older age than the true. From a statistical point of view, the poorly bleached grains can be viewed as outliers.

There is many other source of error leading to outliers, for instance, when unidentified materials are included in the dated sample.

The presence of outliers in chronology construction appears independently of the dating method used. This is an important question when constructing a chronology, since these values will lead, for inversion, to stratigraphic inversions. Many statistical articles applied to dating methods are devoted to this question (see Bronk Ramsey, 2009; Christen and Pérez, 2009; Christophe et al., 2018; Lanos and Philippe, 2017).

Discrete mixture models also provide a way of accommodating suspect data points, so that robust inferences are obtained for the majority of observations. A contaminated normal or Student t model, in which outliers have shifted location and/or variances,

provides one Bayesian approach to outliers (e.g. Verdinelli and Wasserman, 1991).

When outliers are present two approaches are possible : the outliers can either be integrated in the modelling, for example in considering finite discrete mixture models (see Bronk Ramsey, 2009; Christen and Pérez, 2009; Christophe et al., 2018), or a robust estimation method can be built (see Lanos and Philippe, 2018, 2017). The modelling of outliers leads to more complex models that can be difficult to estimate properly in particular in the case of the small sample.

On the contrary, the drawback of robust approaches is the loss of efficiency (in the sense that the variance is not optimal in the absence of outlier). In this paper we propose a process in two steps. Using an extension of the robust model proposed by Lanos and Philippe (2018, 2017) we define a criterion for removing the samples with the worst agreement. Then we re-run an estimation step with a non robust Bayesian model. Even if the second estimation is calculated on smaller sample, we expected that the loss of efficiency associated to the robust model will be compensated.

6.2 Detection of outliers

In this section we propose a method for detecting outlier in the context of hierarchical model.

Consider a parametric family $\{f(\cdot|\theta),\ \theta \in \Theta\}$ and a sample $X_1, ...X_n$ with likelihood of the form

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta_i) \quad (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \Theta^n \tag{6.1}$$

If no information is available to distinguish any of the parameters θ_i from any of the others, we choose a prior distribution on $(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ satisfiyng the property of exchangeability and and having this simple form :

$$\pi(\theta_1, \ldots, \theta_n|\theta, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \pi(\theta_i|\theta, \sigma^2) \tag{6.2}$$

where θ, σ^2 are unknown. The parameter θ is interpreted as the prior mean $\mathbb{E}(\theta_i|\theta, \sigma^2) = \theta$ and σ^2 as the conditional prior variance $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\theta_i|\theta, \sigma^2)$. The parameter σ^2 gives a prior measurement of the heterogeneity in the sample. However, a common parameter σ^2 cannot catch the large variations between θ_i and θ if X_i is an outlier. A way to take into account the presence of outliers is to introduce the individual variances by replacing σ_i^2

for σ^2. The prior distribution (6.2) becomes :

$$\pi(\theta_1, \ldots, \theta_n | \theta, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \prod_{i=1}^{n} \pi(\theta_i | \theta, \sigma_i^2) \tag{6.3}$$

where $\theta = \mathbb{E}(\theta_i | \theta, \sigma_i^2)$, $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}(\theta_i | \theta, \sigma^2)$. Depending on the model defined in (6.1), we have to choose a prior distribution for $\theta, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$,

$$\pi(\theta, \sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2) = \pi_0(\theta) \prod_{i=1}^{n} \pi_s(\sigma_i^2)$$

A particular case of this model is the event model proposed in Lanos and Philippe (2018, 2017) to combine calibrated dates in archaeology. These authors show that these individual parameters σ_i provides robustness in presence of outliers.

6.2.1 Decision rule for detecting outliers

We seek to identify the outliers among the data. If the observation X_i is an outlier then the variable σ_i tends to infinity as $|\theta_i - \theta|$ goes to infinity. Using this property we propose a decision rule, based on the variation between the prior and the posterior medians of σ_i. Denoting by s_0 the median of π_s and fixing a threshold k to be calibrated, the decision rule is the following : the observation X_i is an outlier as soon as

$$\mathbb{P}(\sigma_i > k s_0 | X_1, \ldots, X_n) > 0.50 \tag{6.4}$$

This means that the posterior median of σ_i is greater than $k s_0$. The threshold k is the growth rate of the median with respect to the prior median s_0. To calibrate the value of k, we want to reject at most 5% of values in a sample without outlier. We use Monte Carlo experiments to fix k. For different values of k and of different sizes N of the sample, we calculate the percentage of outliers $p_{N,k}$ in each sample. Then we take the mean value $\bar{p}_{N,k}$ on B independent replications and we select as threshold :

$$\mathrm{argmin}_{k \geq 1} \Big(\bar{p}_{N,k} < 0.05 \Big).$$

6.2.2 Processing outliers

Our strategy is to exclude the outliers detected according to our decision rule (6.4). We denote by $(X_i)_{i \in J}$ the resulting subset of $(X_i)_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ which are not detected as outliers.

Then we reestimate the parameter of interest θ from the model (6.1) and (6.2) calculated on the subset $(X_i)_{i\in J}$. Even though the new estimation is done on a smaller sample than the first robust one, we hope that it will be more accurate.

Remark : If prior information is available on $\theta_1, \ldots, \theta_n, \theta$ to assume the stronger hypothesis that all of them are equals. The re-estimation step can be done with the simpler model :

$$\begin{aligned} &\prod_{i\in J} f(x_i|\theta) \quad \theta \in \Theta \\ &\theta \sim \pi_0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Its corresponds to the previous model with $\sigma^2 = 0$.

6.3 Application to the combination of measurements

6.3.1 Model description

As studied in Lanos and Philippe (2018), we apply our previous methodology to combine repeated measurements assuming the variance error is known. This hierarchical model is defined as follows

$$\begin{aligned} X_i &= \theta_i + s_i\epsilon_i, \qquad \forall\, i = 1, ..., n \\ \theta_i &= \theta + \sigma_i\rho_i \end{aligned} \tag{6.6}$$

where $(\epsilon_1, ...\epsilon_n, \rho_1, ..., \rho_n)$ are independent and identically Gaussian distributed random variables with zero mean and variance 1, and where $s_1^2, \ldots, s_n^2$ are known. We denote $s_0^{-2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n s_i^{-2}$.

Spiegelhalter et al. (2004) and Lanos and Philippe (2018) choose as prior distribution the average uniform shrinkage prior strategy, that is :

$$\frac{C_0^2}{C_0^2 + \sigma_1^2} \sim \mathcal{U}niform[0, 1]$$

where C_0^2, the median of this distribution, is fixed equal to s_0^2. As s_0^2 quantifies measurement error, this prior choice ensures equal weight to these measurement errors and model errors. But in this case, the posterior distributions of σ_i^2 have infinite moments. This is a major drawback since Bayes estimate under quadratic loss is not define. Gustafson et al.

(2006) proposes an extension of the uniform shrinkage where a beta distribution replaces the uniform prior :

$$\frac{C_0^2}{C_0^2+\sigma_1^2} \sim \beta(b,1)$$

where $b \geq 1$. We denote this distribution by $\sigma_1^2 \sim \mathcal{S}hrink(b, C_0)$. The case $b = 1$ corresponds to the uniform case.

In Proposition 6.3.1, we show that this choice solves the moment problem. The existence of the moments of the posterior distribution depends on the choice of b. Moreover, for arbitrary b, we can preserve the same prior information on the median of σ_1^2 by taking :

$$C_0^2 = s_0^2/(2^{1/b}-1).$$

Proposition 6.3.1. *Assume the variances σ_i^2 are independent and identically distributed according to the non uniform shrinkage with parameters (b, C_0). Their posterior distribution admit finite moment of order p if and only if $b > p$.*

Démonstration. According to (6.6), the likelihood of the event model is :

$$\pi(\underline{X}|\theta,\sigma_1^2,\ldots,\sigma_n^2,s_1^2,\ldots,s_n^2) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (X_i-\theta)^2/(s_i^2+\sigma_i^2)\right)}{(2\pi)^{n/2}\prod_{i=1}^n \sqrt{s_i^2+\sigma_i^2}}$$

where $\underline{X} := (X_1,\ldots,X_n)$. The prior distribution is

$$\pi(\theta,\sigma_1^2,...,\sigma_n^2) \propto \mathbb{I}_{\mathbb{R}}(\theta)\prod_{i=1}^n \frac{1}{(C_0^2+\sigma_i^2)^{1+b}}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\sigma_i^2)$$

Note that this prior distribution of σ_i^2 admits moments of order p if and only if $b > p$. After integrating with respect to θ, the posterior distribution of $\sigma_1^2,...,\sigma_n^2$ is :

$$\pi(\sigma_1^2,...,\sigma_n^2|\underline{X}) \propto \prod_{i=1}^n \frac{1}{(C_0^2+\sigma_i^2)^{1+b}\omega_i^{1/2}}\mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(\sigma_i^2) \quad \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \omega_i}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \omega_i V(\sigma_1^2,...,\sigma_n^2)\right) \tag{6.7}$$

where $\omega_i = \dfrac{1}{s_i^2 + \sigma_i^2}$ and $V(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2)$ is the weighted empirical variance :

$$V(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2 \omega_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i \omega_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right)^2$$

We have

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega_i V(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2) \right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i^2 \omega_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n X_i \omega_i \right) \left(\sum_{i=1}^n X_i \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right) \right)$$

For fixed n and $X_1, \ldots, X_n$ in $\mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n X_i \frac{\omega_i}{\sum_{i=1}^n \omega_i}$ is bounded uniformly in $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$. Moreover, for arbitrary h function, $\sum_{i=1}^n h(X_i)\omega_i$ tends to 0 as $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2$ tends to infinity. Therefore, the asymptotic behavior of the posterior distribution defined in (6.7) is

$$\pi(\sigma_1^2, ..., \sigma_n^2 | \underline{X}) \sim \prod_{i=1}^n \frac{1}{(\sigma_i^2)^{b+1}}, \qquad \text{as } \sigma_1^2 \to \infty, \ldots, \sigma_n^2 \to \infty.$$

This conclude the proof. □

Hereafter, we fix $b = 3$, this ensures the existence of the first two moments.

6.3.2 Simulation

We illustrate the performance of our method on simulated samples contaminated with outliers. We simulate a mixture of two gaussian components

$$(1 - \tau)\mathcal{N}(0, s_i^2) + \tau \mathcal{N}(15, s_i^2) \tag{6.8}$$

where the second component corresponds to the outliers and so τ is the rate of contamination. As for the event model, the variances s_i^2 are known.

The first step is to calibrate the threshold k as defined in Section 6.2.1. In figure 6.1, we show that the choice of k is not very sensitive to the sample size N. In view of the results, we recommend to set $k = 1.15$.

We compare the robust method defined in (6.6) estimated on the full sample $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ with two different models estimated on the sub-sample $(X_i)_{i \in J}$ after elimination of outliers detected. To summarize the models, we have :

— $M_1 : \forall\, i = 1, ..., n\ \sigma_i^2 \sim \mathcal{S}hrink(3, C_0^2)$

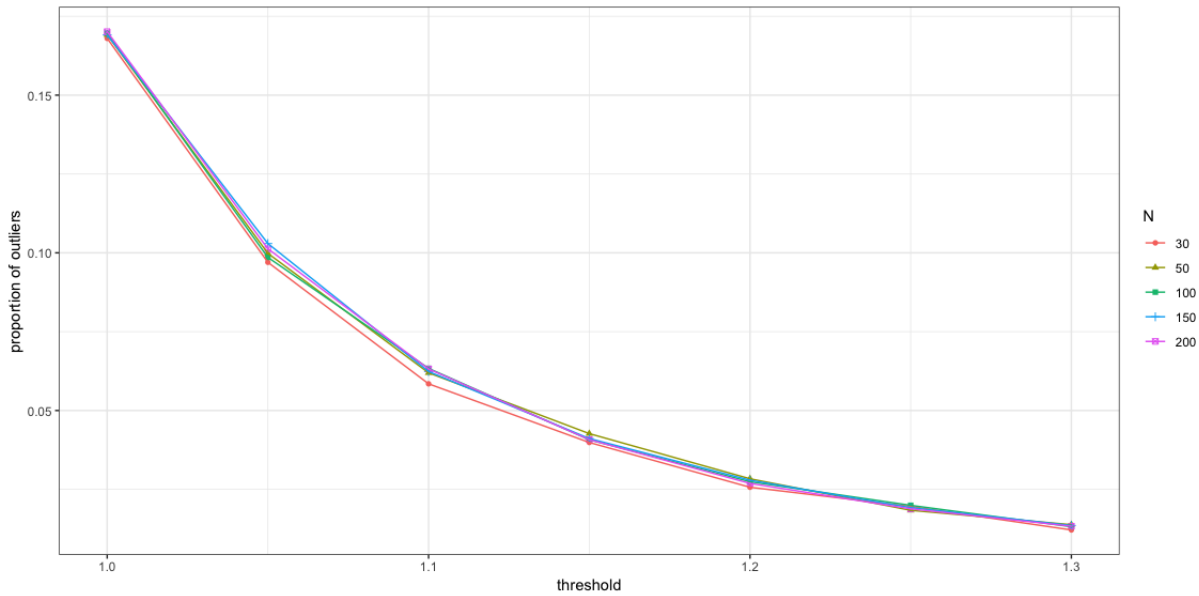


FIGURE 6.1 – Values of the empirical proportion of outliers $\bar{p}_{N,k}$ as function of the threshold k for different values of A and N. These estimations are done with $B = 1000$ independent samples from the OSL-model without outlier.

— $M_2 : \forall\, i \in J,\ \sigma_i^2 = \sigma^2 \sim \mathcal{S}hrink(3, C_0^2)$

— $M_3 : \forall\, i \in J,\ \sigma_i^2 = 0$

Figure 6.2 provides some properties of the posterior distributions for the three models. For comparing them, we represent as a function of τ the boxplot of the posterior mean and standard deviation. This allows the accuracy and precision of these Bayesian models to be accessed as a function of τ. As excepted, the bias and the standard deviation are increasing functions of τ. Despite a smaller number of observations, the two-step estimations are more efficient than the robust event model in terms of accuracy and precision. The models M_2 and M_3 have similar bias, but the variance of the model M_3 is slightly lower than that of the hierarchical model M_2. These properties are confirmed in Figure 6.3. Indeed, the empirical frequentist coverage of Bayesian 95%−credible interval does not vary with τ, and is close to the nominal level. On the contrary, for the robust event model, the coverage frequentist properties are very poor. The choice of robustness induces a greater posterior variance than for models M_2 and M_3. Nevertheless, for large values of τ (above 10 percent), this large variance does not compensate the very large values of bias. This leads to very low frequentist coverage. Table 6.1 provides the empirical percentage of true and false outliers detected by the testing procedure. In both cases, the empirical percentage of true

outliers	true positive	false positive
10%	9.9%	4%
20%	19.8%	4.1%

TABLE 6.1 – Empirical % of true and false positives with $B = 500$ replications

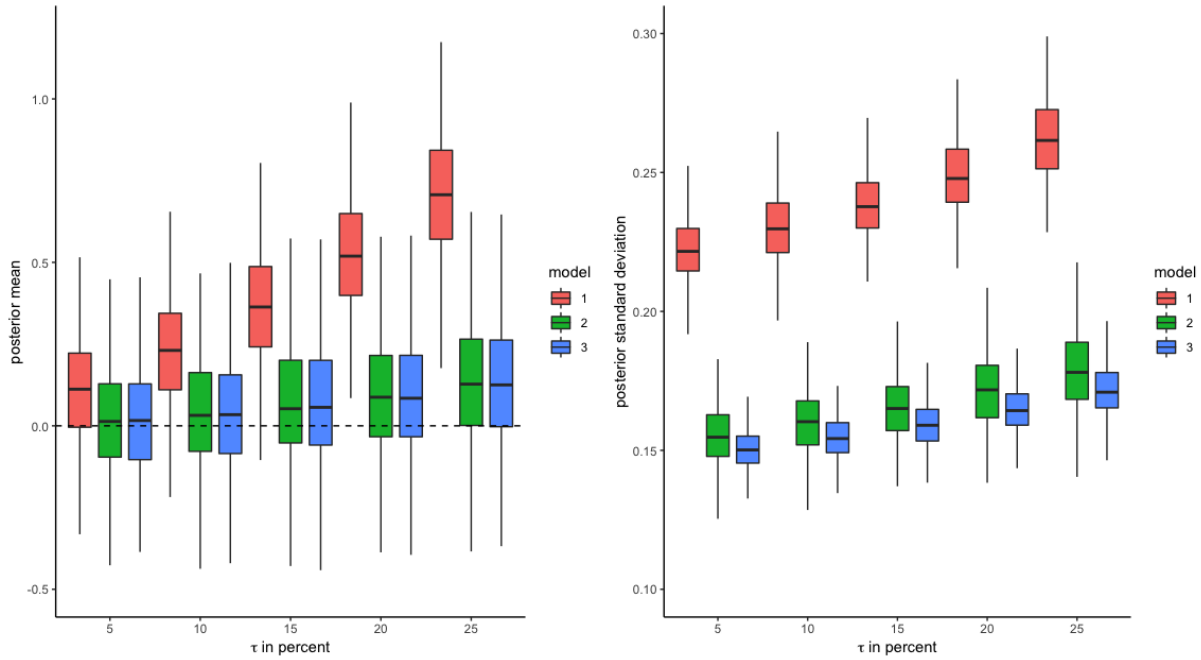


FIGURE 6.2 – Boxplot of the posterior mean (left) and standard deviation (right) calculated on $B = 500$ samples as function of the contamination rate τ defined in (6.8). The sample size is $N = 100$.

positives is close to the percentage of contamination and the percentage of false positives is close to the significance level.

This example on simulated data argues in favor of the two-step models (M_2 or M_3). The choice between M_2 and M_3 depends on the information available on the data. In an archeological context, the M_2 model will be adapted to estimate the age of a target event based on dated events (see Dean (1978)), while the M_3 model will apply to combine together dates that all relate to the same event (see R_Combine model in OxCal, Bronk Ramsey (2009)).

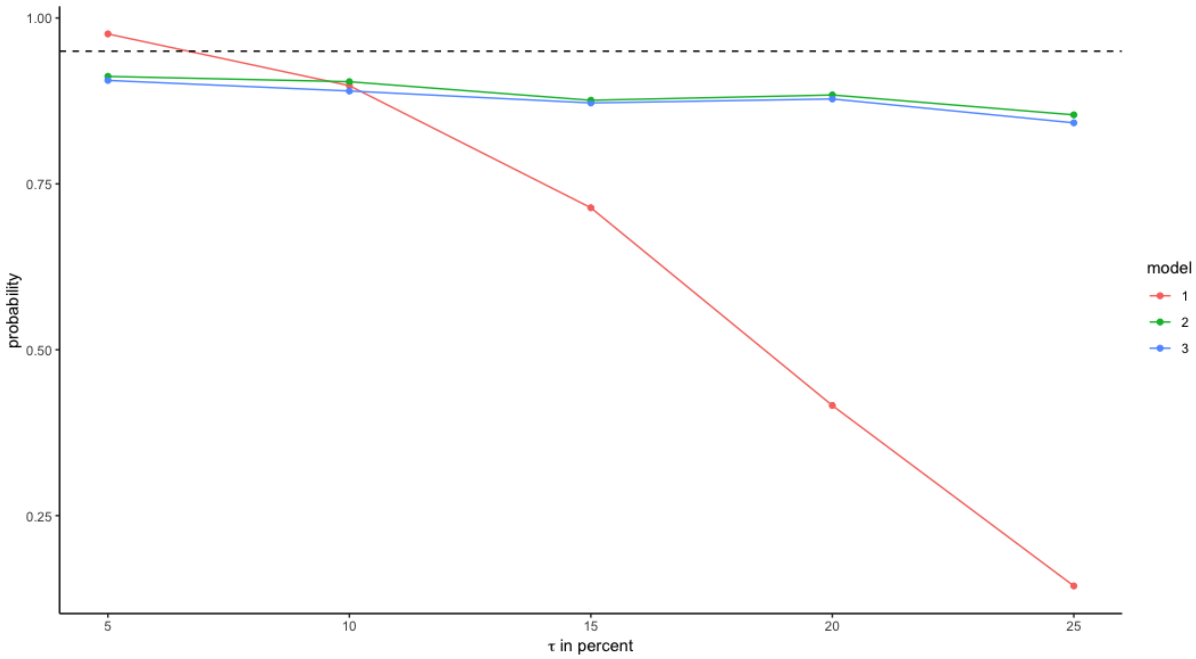


FIGURE 6.3 – Empirical frequentist coverage of the 95%−credible interval calculated on $B = 500$ samples as function of the contamination rate τ defined in (6.8). The sample size is $N = 100$.

6.4 Application to the determination of OSL age

6.4.1 The context

In a sediment, quartz grains are continiously irradiated by cosmic and gamma rays, and by particles (alpha and beta) produced by the decay of natural radioelements. Moreover, they behave as dosimeters in the sense the quartz grains are able to store the radiation doses they receive. The luminescence technique allows determininig the dose (hereafter named equivalent dose) accumulated by a grain since its last exposure to daylight, before burial. In estimating the dose it received per year, or dose-rate, the time elapsed since the burial of the grain i. e. the Age can be calculated. In practice, it is common to extract from a sediment sample hundreds of grains and determine individually their equivalent dose, what gives a distribution of discrete values, each one being affected by an experimental error. In parallel, modelling the sediment sample with a software like DosiVox-2D, which allows simulating with a Monte-Carlo process particle-matter interactions, it is possible to compute the distribution of dose-rates to which each grain may have been exposed during its burial. The equivalent doses and dose rates distributions should theoritically be similar (except a scaling factor) but the former distribution may contain outliers corresponding to grains that have not been exposed to daylight. As a consequence, we want to estimate the age A of a sample dated by the luminescence method in considering the distributions of the equivalent dose D and dose rate $\dot{d}$. The fundamental relationship between D and $\dot{d}$ is

$$D \overset{\mathcal{L}}{=} A\dot{d} \tag{6.9}$$

where $X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$ means that both variables X and Y have the same probability distribution.

Modeling of $\dot{d}$: Numerical experiments provide a sample from the probability distribution of $\dot{d}$ with a systematic error. Therefore, the probability distribution of $\dot{d}$ is only known through a sample distributed according to $\widetilde{\dot{d}} = \dot{d} + \dot{\varepsilon}$.

We fit a parametric model on $(\widetilde{\dot{d}}_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$. For the analyzed dataset, we choose a location-scale family, probability distributions (denoted by $\mathcal{LS}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$ and $\sigma > 0$) parametrized by a position parameter μ and a scale parameter σ. We denote by $\dot{\mu}$ and $\dot{\sigma}^2$ the estimation of these parameters on the sample $(\widetilde{\dot{d}}_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$. These parameters are fixed for the rest of the modeling.

Modeling of D : For each quartz grain, its equivalent dose D is measured with a Gaussian error whose know variance. We denoted $(\widetilde{D}_j)_{j\in\{1,\dots,n\}}$ the observed equivalent

doses determined for n grains :

$$\widetilde{D}_j \sim \mathcal{N}(D_j, s_j^2),\ j \in \{1, ..., n\} \tag{6.10}$$

where $s_1^2, ..., s_n^2$ are known and determined experimentally.

Each equivalent dose D_j is associated with an age A_j. The conditional distribution of D_j given $A_j, \dot{\varepsilon}$ is

$$D_j \sim \mathcal{LS}\left(A_j(\dot{\mu} - \dot{\varepsilon}), A_j^2 \dot{\sigma}^2\right),\ j \in \{1, ..., n\} \tag{6.11}$$

where $\dot{\varepsilon} \sim \mathcal{N}(0.10\dot{\mu}, 0.01\dot{\mu}^2)$. The parameters of the distribution of $\dot{\varepsilon}$ are calibrated with prior information given by the laboratory.

Then we use the same hierarchical event model defined in (6.6) to combine the ages $A_1, \ldots, A_k$. Let A be the age of the target event, i.e. the burial time of the sediment sample. The Bayesian is defined by the DAG in Figure 6.4 and the following conditional distributions :

$$\begin{aligned} A_j &\sim \mathcal{N}(A, \sigma_j^2),\ j \in \{1, ..., n\} \\ \sigma_j^2 &\sim \mathcal{S}hrink(3, C_0^2),\ j \in \{1, ..., n\} \\ A &\sim \mathcal{U}niform[\underline{A}, \overline{A}] \end{aligned}$$

where :

— The interval $[\underline{A}, \overline{A}]$ designates the study period,

— $C_0^2 = \widehat{s}_0^2/(2^{1/b} - 1)$. As Lanos and Philippe (2018), a preliminary estimation of the A_j is required to calculate $\widehat{s}_0^2$. Indeed, $\widehat{s}_0^2$ is the harmonic mean of the variances $Var(A_j|\widetilde{D}_1, ..., \widetilde{D}_n)$ associated with the following model for $j \in \{1, ..., n\}$:

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_j &\sim \mathcal{N}(D_j, s_j^2), \\ D_j &\sim \mathcal{LS}\left(A_j(\dot{\mu} - \dot{\varepsilon}), A_j^2 \dot{\sigma}^2\right), \\ \dot{\varepsilon} &\sim \mathcal{N}(0.10\dot{\mu}, 0.01\dot{\mu}^2) \\ A_j &\sim \mathcal{U}niform[\underline{A}, \overline{A}] \end{aligned}$$

As described in Section 6.2.1, we detect outliers from the posterior distribution of $\sigma_1, ..., \sigma_n$. We delete these outliers according to the decision rule (6.4). We re-estimate the age A from the subsample $(\widetilde{D}_j)_{j \in J}$ remaining after eliminating outliers :

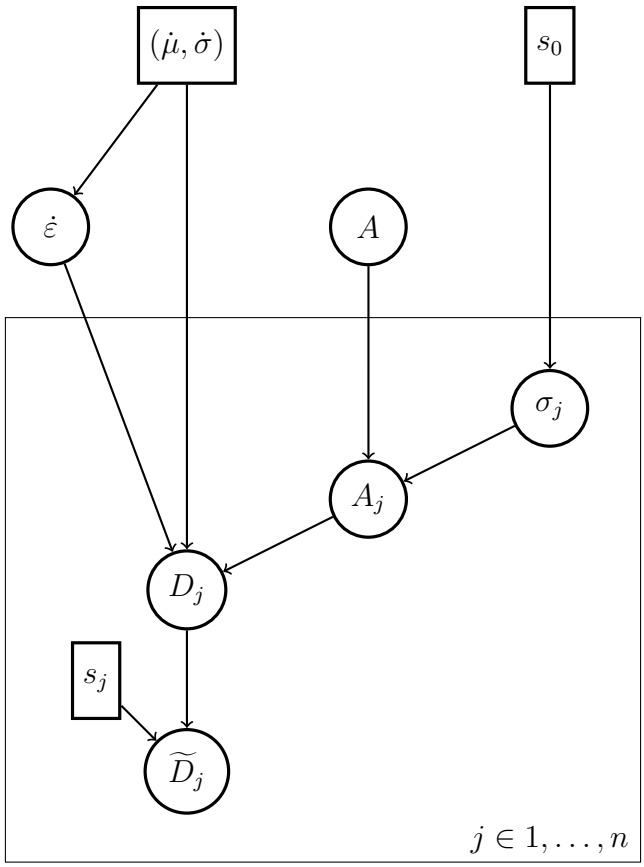


FIGURE 6.4 – DAG of the model

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}_j &\sim \mathcal{N}(D_j, s_j^2), \\
D_j &\sim \mathcal{LS}\left(A(\dot{\mu} - \dot{\varepsilon}), A^2\dot{\sigma}^2\right), \\
\dot{\varepsilon} &\sim \mathcal{N}(0.10\dot{\mu}, 0.01\dot{\mu}^2) \\
A &\sim \mathcal{U}niform[\underline{A}, \overline{A}]
\end{aligned}
$$

To approximate the posterior distribution of all the parameters, MCMC algorithm is required. In the following application, we use Stan software in the R interface to Stan (see Stan Development Team (2018b)).

6.4.2 Data analysis :

We analyse a sample of $n = 384$ equivalent doses. To estimate the age A of this sample, we have a sample of size $N = 100,000$ values provided by the numerical modeling of the sediment and distributed according to the dose rate $\widetilde{\dot{d}}$. For the parametric modeling of $\widetilde{\dot{d}}$, represented by a parametric family $\mathcal{LS}$, we have selected the Cauchy distributions. The estimated parameters of the Cauchy distribution are $\dot{\mu} = 1.33$ and $\dot{\sigma} = 0.024$. The study period is $[10, 150]$. According to the method described above we get as value $\widehat{s}_0 = 6.71$.

Threshold choice : To determine the threshold, we simulate $B = 1000$ independent samples from the model (without outlier) for different values of A and N. We evaluate the proportion of detected outliers as function of the threshold k. Figure 6.5 shows that the proportion is not very sensitive to the A value especially when the sample size N increases. In any case, for ages corresponding to our study period, the value $k = 1.1$ ensures an error rate of less than 5%.

Outliers detection : On the equivalent doses sample, we apply our outliers detection methodology with $k = 1.1$. We detect 14.4 % of outliers. Figure 6.6 represents the posterior mean distribution of the standard deviation σ_j. It can be seen that the standard deviation of the kept doses have the same order of magnitude. Visually, the choice of the threshold seems consistent and not pessimistic.

Age estimation : After removing outliers, we estimate the parameter of interest A with the remaining data (associated to the σ_j with green boxplot in Figure 6.6). Figure 6.7 represents the posterior distribution of the sample age. We also compare this density

with the posterior distribution of A resulting from the robust method. This comparison shows the interest of our methodology in terms of precision (see also the 95%-CI in the caption of Figure 6.7).

Validation of the model : To check the choice of the model, we compare the cumulative distribution of $(D_j)_{j\in J}$ with $A \times (\dot{d}_i)_{i\in 1,\dots N}$. Firstly we compare the empirical distribution of $(\dot{d}_i)_{i\in 1,\dots N}$ with the adjusted Cauchy distribution (see Figure 6.7 [left]). This adjustment is correct in particular around the median. Secondly, we compare the cumulative distribution of the equivalent dose D and $A\dot{d}$. The empirical cumulative distribution of equivalent doses $(D_j)_{j\in J}$ is

$$F_D(t) := \frac{1}{|J|}\sum_{j\in J} \mathbb{1}_{D_j \leq t} \tag{6.12}$$

where $|J|$ denotes the cardinal of J. $F_D(t)$ is a function of these unknown doses, its posterior distribution can be obtained from the posterior distribution of $(D_j)_{j\in J}$. In particular, the Bayes estimate is

$$\mathbb{E}\left(F_D(t)\middle|(\widetilde{D}_j)_{j\in J}\right) = \frac{1}{|J|}\sum_{j\in J} F_{D_j|\widetilde{D}}(t).$$

where $F_{D_j|\widetilde{D}}$ is the cumulative distribution function of the posterior distribution of D_j. Similarly, the Cauchy distribution of $A\dot{d}$ depends on unknown parameters $(A, \dot{\varepsilon})$. Therefore, the cumulative distribution function $F_{A\dot{d}}$ is an unknown parameter

$$F_{A\dot{d}}(t) = \dot{G}\left(\frac{t}{A} - \dot{\varepsilon}\right) \tag{6.13}$$

where $\dot{G}$ is the Cauchy cumulative distribution function with location parameter $\dot{\mu}$ and scale parameter $\dot{\sigma}$. Its posterior distribution can be obtained by a change of variables from the posterior distribution of $(A, \dot{\varepsilon})$.

For fixed t, we construct MCMC sample from the posterior distribution of $F_D(t)$ and $F_{A\dot{d}}(t)$, we represent in Figure 6.8 [right] their 95%−credible intervals. The two intervals coincide over a wide range of values around the median. This confirms the goodness of fit between the distributions of $D, A\dot{d}$.

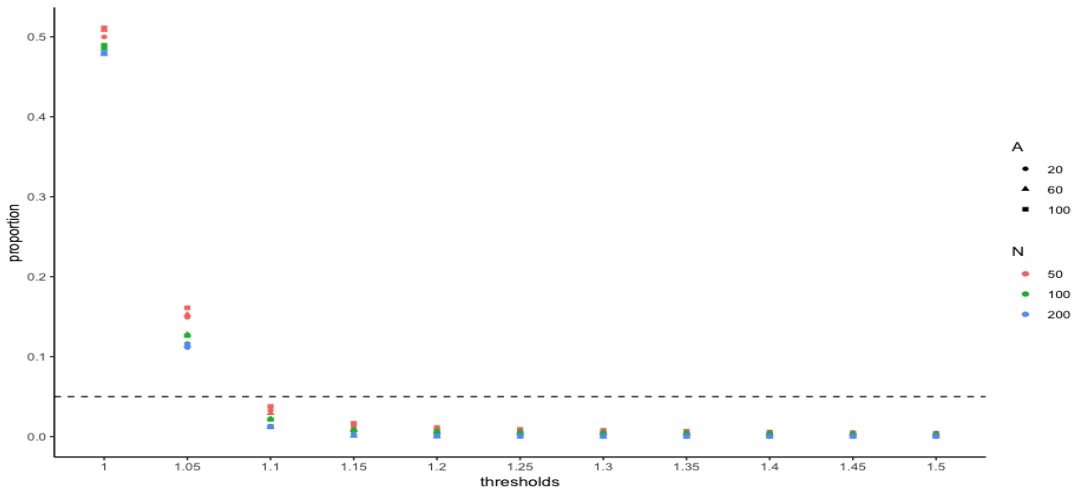


FIGURE 6.5 – Values of the empirical proportion of outliers $\bar{p}_{N,k}$ as function of the threshold k for different values of A and N. These estimations are done on $B = 1000$ independent samples from the OSL-model without outlier.

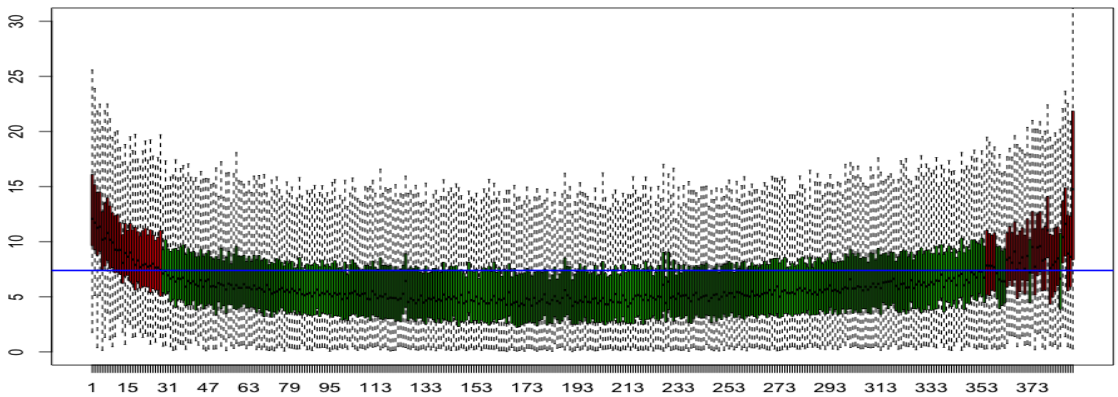


FIGURE 6.6 – Boxplot of the posterior distributions of σ_j ordered by the posterior median of ages A_j. The red color indicates the detected outliers. The blue line corresponds to $1.1\widehat{s}_0$

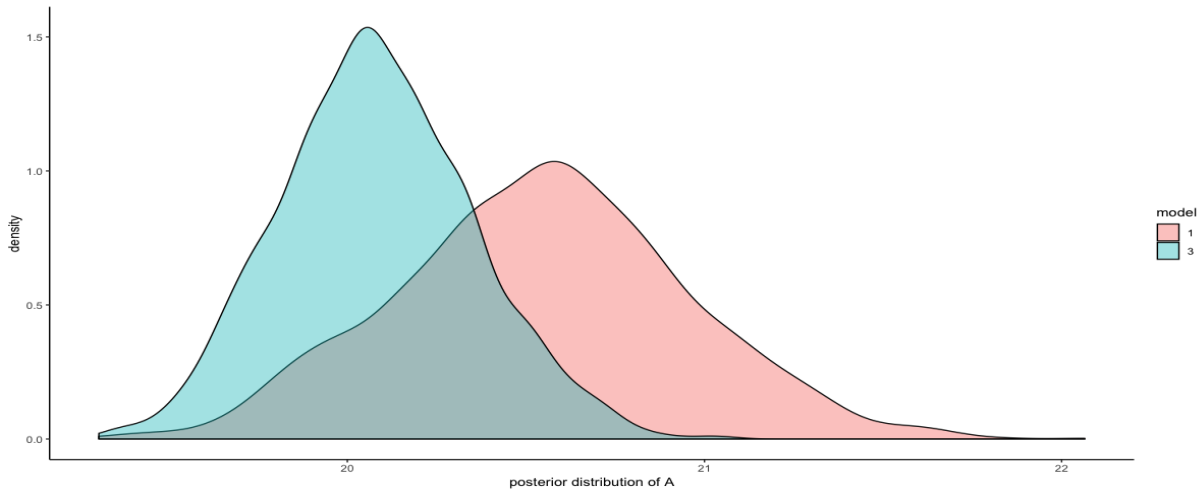


FIGURE 6.7 – Comparison of the posterior distributions of A : in green the estimation after removing outliers(posterior mean : 20.08 and 95%-CI= $[19.58, 20.64]$), in brown the robust estimation on the full sample (posterior mean : 20.54 and 95%-CI= $[19.77, 21.34]$)

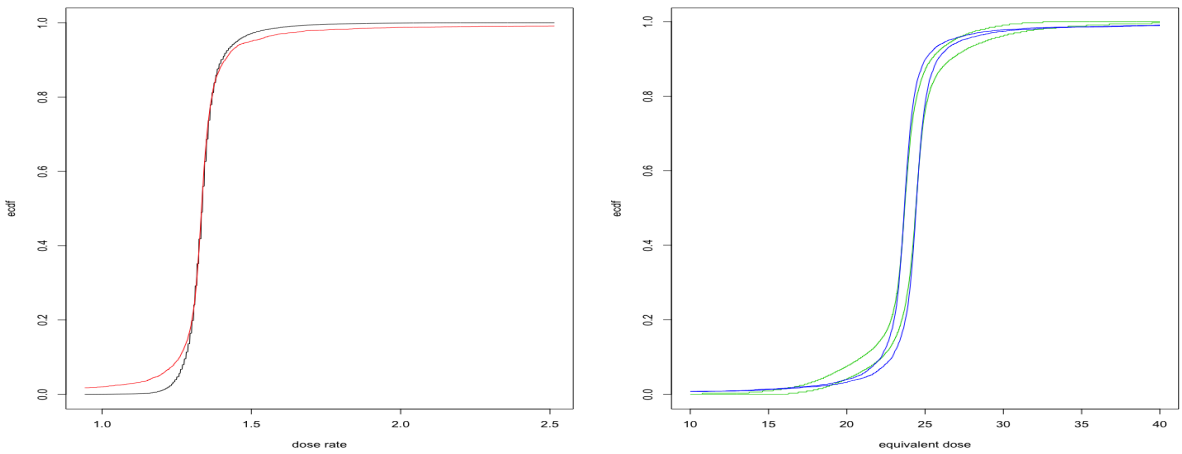


FIGURE 6.8 – [Left] Representation of the empirical cumulative distribution function of $\tilde{d}$ (red) and its parametric fit (black). [Right] Representation of the 95%−credible intervals of $F_D, F_{A\dot{d}}$ defined in (6.12), (6.13).

Conclusion et perspectives

Analyse de la médiation

— Dans le chapitre 2, une procédure non paramétrique pour tester l'existence de l'effet direct dans des modèles de médiation à réponse binaire a été proposée. Ce test dont la région critique est basée sur l'estimateur de Nadaraya-Watson montre numériquement de bonnes performances et s'avère beaucoup plus puissant que les tests usuels en cas de relations non monotones entre les variables explicatives et la variable réponse. Il serait intéressant de déterminer une loi asymptotique pour cette statistique afin d'éviter de recourir comme actuellement au bootstrap qui est relativement long en terme de temps de calculs.

— Une adaptation des G-priors a été proposée dans plusieurs contextes d'utilisation de l'analyse de médiation avec une variable réponse binaire (chapitre 3) et avec une variable réponse gaussienne (chapitre 4 et 5). Les résultats numériques indiquent que ces lois a priori sont bien adaptées à toutes ces situations. En effet les lois a posteriori des paramètres ont de bonnes propriétés fréquentistes en terme de biais, de RMSE, de niveau de couverture des intervalles de crédibilité.

— Dans le chapitre 3, la comparaison de différentes lois a priori dans l'analyse de la médiation montre l'intérêt de l'approche bayésienne. En effet, l'apport d'information basé sur la méthode de "transfert Learning" de Launay et al. (2015) permet d'améliorer les estimations des paramètres d'intérêt dans les cas où l'information historique est exacte (ce qui était attendu) et ne détériore pas ces estimations même si on observe une évolution importante entre les données historiques et les données actuelles. L'approche semi-informative des $G-$priors montre des performances comparables à la technique usuelle proposée par Imai et al. (2010a). Le test fréquentiste de l'effet indirect basé sur les propriétés asymptotiques des lois a posteriori montre numériquement de meilleures performances que les tests classiques.

Perspectives autour du Facteur de Bayes

— Dans le chapitre 4, le facteur de Bayes a été utilisé en tant que statistique pour tester l'effet modérateur d'une variable binaire sur un modèle de médiation. La règle de décision a été déterminée en imposant au test de vérifier la condition fréquentiste de niveau. Ceci a permis de constater que les échelles de Jeffreys (1961); Kass and Raftery (1995) ne sont pas adaptées dans ce contexte.

— Pour prolonger cette utilisation du facteur de Bayes comme statistique, je m'intéresse à la problématique de l'équivalence à laquelle j'ai été confronté dans l'une des collaborations avec les psychologues (see. Tessoulin et al., 2019). La procédure de test utilisée actuellement (TOST voir Hauck and Anderson, 1984) s'avère peu puissante pour des petits échantillons. J'étudie la possibilité de proposer selon la même approche que 4.2.3 une procédure basée sur le facteur de Bayes. Il serait aussi intéressant d'exploiter l'idée originale de Kamary et al. (2014) qui proposent d'utiliser un mélange pour confronter deux modèles $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$, l'un des deux modèles correspondant à l'hypothèse d'équivalence. La statistique utilisée sera dans ce cas la probabilité a posteriori du modèle correspondant à l'équivalence.

Archéologie

— Le travail réalisé a été motivé par une collaboration avec un archéologue spécialiste de la datation OSL. La difficulté rencontrée est la présence d'outliers dans les échantillons à dater, ces outliers ayant de plus des origines multiples. A partir du modèle d'événement proposé par Lanos and Philippe (2018) j'ai proposé un test de détection des outliers en exploitant les paramètres liés aux effets aléatoires de ce modèle. Cette méthodologie est maintenant appliquée en routine par l'archéologue et donne des résultats satisfaisants.

— Cette méthodologie a été appliquée à la combinaison de mesures qui est le cadre initial de l'event model. Elle montre numériquement de bonnes performances.

— J'envisage d'appliquer cette méthodologie à l'estimation d'une chronologie connaissant la stratigraphie. L'analyse des unités stratigraphiques permet de retracer l'histoire d'un site archéologique. En effet, l'agencement de ces strates (appelée séquence stratigraphique) fournit un ordre temporel des événements du site archéologique. Chaque unité stratigraphique θ_i est caractérisée par des objets d'âges respectifs

$t_{i,1}, \ldots, t_{i,N_i}$ et ces unités stratigraphiques vérifieront donc la contrainte d'ordre :

$$\theta_1 < \ldots < \theta_I.$$

Comme précédemment il peut y avoir eu des bouleversements de différentes origines conduisant à des déplacements d'objets vers d'autres unités stratigraphiques. Les âges de ces objets vont apparaître comme des valeurs aberrantes pour la détermination de l'âge de l'unité où ils sont prélevés. Du fait de la contrainte d'ordre, une erreur sur l'âge d'une unité pourra avoir un impact sur l'ensembles des âges $(\theta_1, ..., \theta_I)$. Lanos and Philippe (2018) ont appliqué le modèle d'évènement dans ce contexte pour obtenir une estimation robuste de ces âges. Pour gagner en efficacité comme pour la combinaison de dates, je souhaiterais étendre à cette problématique la procédure de test permettant l'identification et l'exclusion de ses outliers.

Annexe A

Questionnaire mesurant le leadership habilitant

Mon superviseur immédiat...

1. M'aide à comprendre comment mes objectifs sont liés à ceux de l'entreprise
2. M'aide à comprendre l'importance de mon travail pour l'efficacité de l'entreprise
3. M'aide à comprendre de quelle façon mon travail s'inscrit dans la mission d'ensemble de l'entreprise
4. Prend beaucoup de décisions avec moi
5. Me consulte souvent avant de prendre des décisions stratégiques
6. Sollicite mon avis sur des décisions qui peuvent m'affecter
7. Croit que je peux assumer des tâches exigeantes
8. Croit en ma capacité de m'améliorer, même lorsque je fais des erreurs
9. Exprime sa confiance en ma capacité à atteindre un haut niveau de performance
10. Me permet de faire mon travail à ma façon
11. Rend mon travail plus efficace en gardant les règles et les réglements simples
12. Me permet de prendre rapidement des décisions importantes afin de satisfaire les besoins des clients

Annexe B

α de Cronbach

Pour mesurer la qualité d'un questionnaire, on calcule des indices de cohérence interne. Le plus utilisé est l'indice α (Cronbach (1951)). Un questionnaire doit être composé d'items mesurant tous la même variable latente. α est défini par :

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum_{j=1}^{k} \sigma_{I_j}^2}{\sigma_X^2}\right)$$

où $\sigma_{I_j}^2$ est la variance de l'item j et σ_X^2 est la variance de la somme des scores des items. Cet indice est également utilisé pour éliminer d'éventuels items qui affaibliraient la cohérence interne globale du questionnaire. Ce nombre est compris entre 0 et 1, on considère que la cohérence interne d'un questionnaire est acceptable dès que $\alpha > .70$.

Annexe C

Facteur de Bayes pour les modèles linéaires

Les calculs suivants sont inspirés de Marin and Robert (2014). Soit le modèle linéaire

$$Y|\beta, \sigma^2, X_1, \ldots, X_p \sim \mathcal{N}_N(\phi\beta, \sigma^2 \mathbb{1}_N)$$

$X_1, \ldots, X_p$ étant des régresseurs continus et $\phi = [\mathbb{1}_N, X_1, ..., X_p]$. On considère le $G-$prior informatif : $\beta|\sigma^2, \phi \sim \mathcal{N}_{p+1}(\widetilde{\beta}, g\sigma^2(\phi'\phi)^{-1})$ et $\pi(\sigma^2) \propto \sigma^{-2}$. On a donc

$$\phi\beta|\sigma^2, \phi \sim \mathcal{N}_N(\phi\widetilde{\beta}, g\sigma^2\phi(\phi'\phi)^{-1}\phi')$$

donc $Y|\sigma^2, \phi \sim \mathcal{N}_N\Big(\phi\widetilde{\beta}, \sigma^2(I_N + g\phi(\phi'\phi)^{-1}\phi')\Big)$ si on intègre cette expression en σ^2 on obtient :

$$p(Y|\phi) = (g+1)^{-(p+1)/2}\pi^{-N/2}\Gamma(N/2)\left(Y'Y - \frac{g}{g+1}Y'\phi(\phi'\phi)^{-1}\phi'Y - \frac{1}{g+1}\widetilde{\beta}'\phi'\phi\widetilde{\beta}\right)^{-N/2}$$

Pour comparer les modèles $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$ comportant respectivement p_1 et p_2 variables parmi les variables $X_1, ..., X_p$ le facteur de Bayes est donc explicite

$$BF_{12} = \frac{(g_1+1)^{-(p_1+1)/2}\left(Y'Y - \frac{g_1}{g_1+1}Y'\phi_1\widehat{\beta}_1 - \frac{1}{g_1+1}\widetilde{\beta}_1'\phi_1'\phi_1\widetilde{\beta}_1\right)^{-N/2}}{(g_2+1)^{-(p_2+1)/2}\left(Y'Y - \frac{g_2}{g_2+1}Y'\phi_2\widehat{\beta}_2 - \frac{1}{g_2+1}\widetilde{\beta}_2'\phi_2'\phi_2\widetilde{\beta}_2\right)^{-N/2}}$$

Annexe D

Serial multiple mediator model

Soit $\mathcal{M}$ le modèle de médiation décrit dans la figure D.1. Hayes (2018) le définit comme serial multiple mediator model. Le modèle $\mathcal{M}$ est une alternative au modèle à médiateurs parallèles dans la mesure où il autorise des liens entre les médiateurs. Supposons par exemple que toutes les variables du modèle $\mathcal{M}$ sont continues.

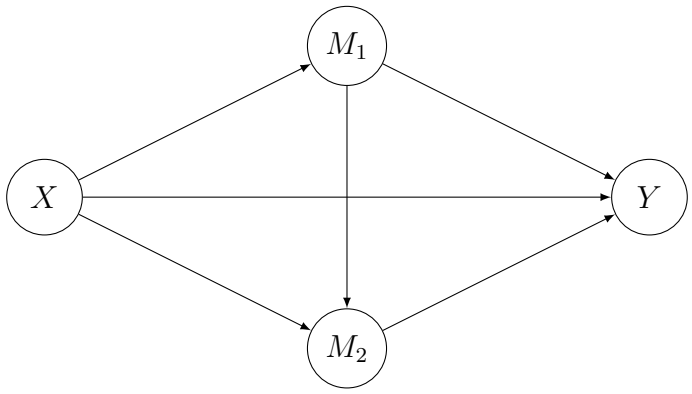


FIGURE D.1 – Modèle de médiation à médiateurs multiples

Considérons que le $\mathcal{M}$ est modélisé par les équations de régression suivantes :

$$M_1 = \theta_0^{M_1} + \theta_X^{M_1} X + \varepsilon_{M_1} \tag{D.1}$$

$$M_2 = \theta_0^{M_2} + \theta_X^{M_2} X + \theta_{M_1}^{M_2} M_1 + \varepsilon_{M_2} \tag{D.2}$$

$$Y = \theta_0^{Y} + \theta_X^{Y} X + \theta_{M_1}^{Y} M_1 + \theta_{M_2}^{Y} M_2 + \varepsilon_{Y} \tag{D.3}$$

Pour le médiateur M_2 il y a un deuxième type d'effet indirect de X sur Y à travers $M_1, M_2 : X \to M_1 \to M_2 \to Y$ qui s'identifie à $\theta_{M_2}^{Y} \theta_{M_1}^{M_2} \theta_X^{M_1}$. Dans ce contexte si on regarde

l'effet indirect de X sur Y à travers M_2 on a :

$$I_{X \to M_2 \to Y} = \theta^Y_{M_2} \theta^{M_2}_X + \theta^Y_{M_2} \theta^{M_2}_{M_1} \theta^{M_1}_X$$

où $Y = \psi_0 + \psi_X X + \varepsilon'_Y$.

L'estimation des paramètres $\theta := (\theta^{M_1}, \sigma^2_{M_1}, \theta^{M_2}, \sigma^2_{M_2}, \theta^Y, \sigma^2_Y)$ où $\theta^{M_1} = (\theta^{M_1}_0, \theta^{M_1}_X)$, $\theta^{M_2} = (\theta^{M_2}_0, \theta^{M_2}_X, \theta^{M_2}_{M_1})$, et $\theta^Y = (\theta^Y_0, \theta^Y_X, \theta^Y_{M_1}, \theta^Y_{M_2})$ peut être réalisée par le modèle bayésien décrit dans la suite. Comme précédemment (chapitre 4 et 5) les G-priors vont s'adapter sans difficulté dans cette modélisation et fournir des lois a priori non informatives.

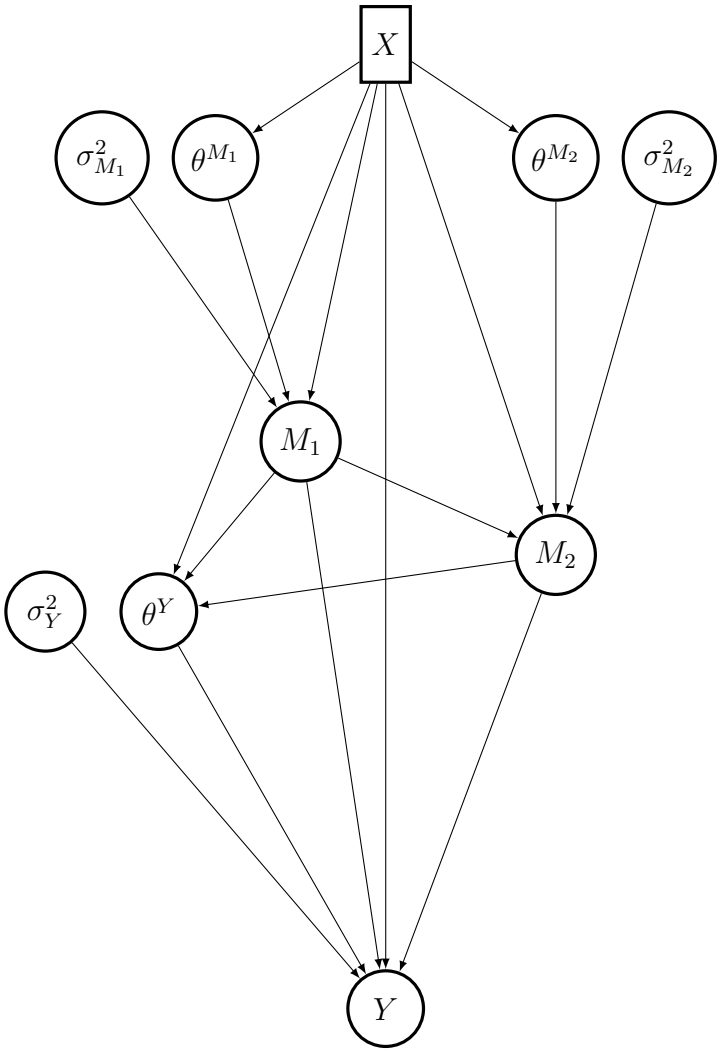


FIGURE D.2 – DAG du modèle à médiateurs en série

On écrit la loi jointe du modèle conditionnellement à X (figure D.2) :

$$\begin{aligned} p(M_1, M_2, Y, \theta|X) =& p(Y|X, M_1, M_2, \theta^Y, \sigma_Y^2)p(\theta^Y|X, M_1, M_2, \sigma_Y^2)\times \\ & p(M_1|X, \theta^{M_1}, \sigma_{M_1}^2)p(\theta^{M_1}|X, \sigma_{M_1}^2)\times \\ & p(M_2|X, M_1, \theta^{M_2}, \sigma_{M_2}^2)p(\theta^{M_2}|X, M_1, \sigma_{M_2}^2)\times \\ & p(\sigma_Y^2)p(\sigma_{M_1}^2)p(\sigma_{M_2}^2) \end{aligned}$$

où :

— $p(Y|X, M_1, M_2, \theta_Y, \sigma_Y^2)$, $p(M_1|X, \theta^{M_1}, \sigma_{M_1}^2)$ et $p(M_2|X, M_1, \theta^{M_2}, \sigma_{M_2}^2)$ sont données respectivement par (D.3) (D.1) (D.2).

— Pour $p(\sigma_{M_i}^2)$ et $p(\sigma_Y^2)$ on choisit $p(\sigma_\bullet^{-2}) \propto \sigma_\bullet^{-2}$

— pour $p(\theta^Y|X, M_1, M_2, \sigma_Y^2)$ on adapte le $G-$prior :

$$\theta^Y|X, M_1, M_2, \sigma_Y^2 \sim \mathcal{N}_4(0_4, N\sigma_Y^2(\phi_Y'\phi_Y)^{-1})$$

où $\phi_Y = \left[\mathbb{1}, X, M_1, M_2\right]$

— pour $p(\theta^{M_1}|X, \sigma_{M_1}^2)$ et $p(\theta^{M_2}|X, M_1, \sigma_{M_2}^2)$ les G-prior sont définis en considérant $\phi_{M_1} = \left[\mathbb{1}, X\right]$ et $\phi_{M_2} = \left[\mathbb{1}, X, M_2\right]$.

Remark D.0.1. *Ce modèle s'adapte sans aucune difficulté lorsque la variable d'exposition X est nominale et si on considère plusieurs variables d'exposition $X_1, \ldots, X_K$*

Bibliographie

Agresti, A. (2006). *Multicategory Logit Models.* John Wiley & Sons, Inc.

Ahearne, M., Mathieu, J., and Rapp, A. (2005). To empower or not to empower your sales force ? An empirical examination of the influence of leadership empowerment behavior on customer satisfaction and performance. *Journal of Applied Psychology.*

Allen, N. J. and Meyer, J. P. (1990). The measurement and antecedents of affective, continuance and normative commitment to the organization. *Journal of Occupational Psychology*, 63 :1–18.

Baron, R. M. and Kenny, D. A. (1986). The moderator-mediator variable distinction in social psychological research: conceptual, strategic, and statistical considerations. *Journal of Personality and Social Psychology*, 51(6) :1173.

Bollen, K. A. (1989). *Structural Equations with Latent Variables.* Wiley series in probability and mathematical statistics. Applied probability and statistics section. Wiley.

Briggs, S. R. and Cheek, J. M. (1986). The role of factor analysis in the development and evaluation of personality scales. *Journal of Personality*, 54 :106–148.

Bronk Ramsey, C. (1998). Probability and dating. *Radiocarbon*, 40 :461–474.

Bronk Ramsey, C. (2009). Dealing with outliers and offsets in radiocarbon dating. *Radiocarbon*, 51(3) :1023–1045.

Caillé, A., Courtois, N., Galharret, J.-M., and Joffrion, C. (2019). Influence du leadership habilitant sur le bien-être au travail et l'engagement organisationnel. Soumis dans Psychologie du Travail et des Organisations.

Christen, J. and Pérez, S. (2009). A new robust statistical model for radiocarbon data. *Radiocarbon*, 51(3) :1047–1059.

Christophe, C., Philippe, A., Guérin, G., Mercier, N., and Guibert, P. (2018). Bayesian approach to OSL dating of poorly bleached sediment samples: Mixture distribution models for dose (MD2). *Radiation Measurements*, 108 :59 – 73.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences*. Lawrence Erlbaum Associates.

Combès, B. and Philippe, A. (2017). Bayesian analysis of individual and systematic multiplicative errors for estimating ages with stratigraphic constraints in optically stimulated luminescence dating. *Quaternary Geochronology*, 39(Supplement C) :24 – 34.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*.

Daniels, M. J., Roy, J. A., Kim, C., Hogan, J. W., and Perri, M. G. (2012). Bayesian inference for the causal effect of mediation. *Biometrics*, 68(4) :1028–1036.

Dean, J. S. (1978). Independent dating in archaeological analysis. *Advances in Archaeological Method and Theory*, 1 :223–255.

Dench, S. and Regan, J. (2000). Learning in later life: Motivation and impact. Technical report, London : Department for Education and Employed.

Elliott, M. R., Raghunathan, T. E., and Li, Y. (2010). Bayesian inference for causal mediation effects using principal stratification with dichotomous mediators and outcomes. *Biostatistics (Oxford, England)*, 11(2) :353–372.

Erol, R. Y. and Orth, U. (2011). Self-esteem development from age 14 to 30 years: A longitudinal study. *Journal of Personality and Social Psychology*, 101.

Fang, F., Martin, L., Mercier, N., Incerti, S., Grün, R., and Lefrais, Y. (2018). 2d modelling: A Monte Carlo approach for assessing heterogeneous beta dose rates in luminescence and ESR dating: Paper 2, application to igneous rocks. *Quaternary Geochronology*, 48 :195–206.

Fisher, J. O., Birch, L. L., Smiciklas-Wright, H., and Picciano, M. F. (2000). Breastfeeding through the first year predicts maternal control in feeding and subsequent toddler energy intakes. *Journal of the American Dietetic Association*, 100(6) :641–646.

Fisher, R. A. (1935). *The Design of Experiments*. Oxford, England.

Galbraith, R. F., Roberts, R. G., Laslett, G. M., Yoshida, H., and Olley, J. M. (1999). Optical dating of single and multiple grains of quartz from Jinmium rock shelter, Northern Australia: Part i, experimental design and statistical models. *Archaeometry*, 41(2) :339–364.

Galharret, J., Philippe, A., and Mercier, N. (2019a). Detection of outliers with a Bayesian hierarchical model : application to the single-grain luminescence dating method.

Galharret, J.-M. and Philippe, A. (>2019). Priors comparison in Bayesian mediation framework with binary outcome.

Galharret, J.-M., Philippe, A., and Rochet, P. (>2019b). Non-parametric mediation analysis for direct effect with binary outcomes.

Garstka, T. A., Schmitt, M. T., Branscombe, N. R., and Hummert, M. L. (2004). How Young and Older Adults Differ in Their Responses to Perceived Age Discrimination. *Psychology and Aging*, 19 :326–335.

Gelman, A. (2006). Prior distributions for variance parameters in hierarchical models (comment on article by Browne and Draper). *Bayesian Anal.*, 1(3) :515–534.

Gelman, A. (2008). Scaling regression inputs by dividing by two standard deviations. *Statistics in Medicine*, 27(15) :2865–2873.

Gelman, A., Jakulin, A., Pittau, M. G., and Su, Y.-S. (2007). A weakly informative default prior distribution for logistic and other regression models. *The Annals of Applied Statistics*, 2.

Ghosh, M., Mukhopadhyay, N., and Sen, P. (1997). *Sequential estimation*. Wiley series in probability and statistics: Probability and statistics. Wiley.

Gilbert, M.-H., Dagenais-Desmarais, V., and Savoie, A. (2011). Validation d'une mesure de santé psychologique au travail. *European Review of Applied Psychology*, 61(4) :195 – 203.

Guimard, P., Bacro, F., Ferrière, S., and Florin, A. (2015). Le bien-être des élèves à l'école et au collège : Validation d'une échelle multidimensionnelle, analyses descriptives et différentielles. *Éducation et Formations*, 88-89.

Gustafson, P., Hossain, S., and MacNab, Y. C. (2006). Conservative prior distributions for variance parameters in hierarchical models. *The Canadian Journal of Statistics / La Revue Canadienne de Statistique*, 34(3) :377–390.

Hanson, T. E., Branscum, A. J., and Johnson, W. O. (2014). Informative g -priors for logistic regression. *Bayesian Anal.*, 9(3) :597–612.

Harrell, Jr., F. E. (2006). *Regression Modeling Strategies.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.

Hauck, W. W. and Anderson, S. (1984). A new statistical procedure for testing equivalence in two-group comparative bioavailability trials. *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics*, 12(1) :83–91.

Hauck Jr., W. W. and Donner, A. (1977). Wald's test as applied to hypotheses in logit analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 72(360a) :851–853.

Hayes, A. (2018). *Introduction to Mediation, Moderation, and Conditional Process Analysis: A Regression-Based Approach.* Methodology in the Social Sciences Series. Guilford Publications, 2nd edition edition.

Hayes, A. F., Montoya, A. K., and Rockwood, N. J. (2017). The analysis of mechanisms and their contingencies: PROCESS versus structural equation modeling. *Australasian Marketing Journal (AMJ)*, 25(1) :76 – 81.

Hayes, A. F. and Preacher, K. J. (2014). Statistical mediation analysis with a multicategorical independent variable. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 67(3) :451–470.

Imai, K. and Keele, L. (2010). A general approach to causal mediation analysis. *Psychological Methods*, 15(4) :309–334.

Imai, K., Keele, L., Tingley, D., and Yamamoto, T. (2010a). Causal mediation analysis using r. In Vinod, H. D., editor, *Advances in Social Science Research Using R.* Springer-Verlag, New York.

Imai, K., Keele, L., and Yamamoto, T. (2010b). Identification, inference and sensitivity analysis for causal mediation effects. *Statist. Sci.*, 25(1) :51–71.

Jeffreys, H. (1961). *Theory of Probbility.* Oxford University Press.

Judd, C. M., Kenny, D. A., and McClelland, G. H. (2001). Estimating and testing mediation and moderation in within-subject designs. *Psychological Methods*, 6.

Kamary, K., Mengersen, K., Robert, C. P., and Rousseau, J. (2014). Testing hypotheses via a mixture estimation model.

Karademas, E. C. (2006). Self-efficacy, social support and well-being: The mediating role of optimism. *Personality and Individual Differences*, 40(6) :1281 – 1290.

Kass, R. E. and Raftery, A. E. (1995). Bayes factors. *Journal of the American Statistical Association*, 90(430) :773–795.

Kenny, D. A., Kashy, D. A., and Bolger, N. (1998). *Data analysis in social psychology.*, pages 233–265. McGraw-Hill, New York, NY, US.

Kenny, David A.and Korchmaros, J. D. and Bolger, N. (2003). Lower level mediation in multilevel models. *Psychological Methods*, 8.

Kim, C., Daniels, M. J., Marcus, B. H., and Roy, J. A. (2017). A framework for Bayesian nonparametric inference for causal effects of mediation. *Biometrics*, 73(2) :401–409.

Kiviruusu, O., Huurre, T., Aro, H., Marttunen, M., and Haukkala, A. (2015). Self-esteem growth trajectory from adolescence to mid-adulthood and its predictors in adolescence. *Advances in Life Course Research*, 23.

Kline, R. (2011). *Principles and Practice of Structural Equation Modeling.* Methodology in the social sciences. Guilford Publications.

Krull, J. L. and Mackinnon, D. P. (1999). Multilevel mediation modeling in group-based intervention studies. *Evaluation Review*, 23.

Lanos, P. and Philippe, A. (2017). Hierarchical Bayesian modeling for combining dates in archaeological context. *Journal de la Société Française de Statistique*, 158 :72–88.

Lanos, P. and Philippe, A. (2018). Event date model: a robust Bayesian tool for chronology building. *Communications for Statistical Applications and Methods, Korean Statistical Society (KSS)*, 25(2) :p 131–157.

Launay, T., Philippe, A., and Lamarche, S. (2015). Construction of an informative hierarchical prior for a small sample with the help of historical data and application to electricity load forecasting. *TEST*, 24(2) :361–385.

MacKinnon, D. P. (2008). *Introduction to Statistical Mediation Analysis.* Routledge.

MacKinnon, D. P., Lockwood, C. M., Hoffman, J. M., West, S. G., and Sheets, V. (2002). A comparison of methods to test mediation and other intervening variable effects. *Psychological Methods*, 7.

MacKinnon, D. P., Lockwood, C. M., and Williams, J. (2004). Confidence limits for the indirect effect: Distribution of the product and resampling methods. *Multivariate Behavioral Research*, 39.

Mair, P. (2018). *Modern Psychometrics with R.* Use R. Springer.

Marin, J.-M. and Robert, C. (2014). *Bayesian essentials with R.* Springer Textbooks in Statistics. Springer Verlag, New York.

Martin, L., Fang, F., Mercier, N., Incerti, S., Grün, R., and Lefrais, Y. (2018). 2d modelling: A Monte Carlo approach for assessing heterogeneous beta dose rate in luminescence and ESR dating: Paper 1, theory and verification. *Quaternary Geochronology*, 48 :25–37.

Masson, J. and Fenouillet, F. (2013). Relation entre sentiment d'efficacité personnelle et résultats scolaires à l'école primaire : Construction et validation d'une échelle. *Enfance*, 4(4) :374–392.

Meyer, J. P., Allen, N. J., and Smith, C. A. (1993). Commitment to organizations and occupations : Extension and test of a three-component conceptualization. *Journal of Applied Psychology*, 78(4) :538–551.

Miočević, M., Gonzalez, O., Valente, M. J., and MacKinnon, D. P. (2018). A tutorial in Bayesian potential outcomes mediation analysis. *Structural Equation Modeling: A Multidisciplinary Journal*, 25(1) :121–136.

Ndobo, A., Faure, A., and Galharret, J.-M. (2019). The coping strategies of individuals in multiple jeopardy settings : The case of older workers and job-seekers.

Neyman, J. S. (1935). *Statistical Problems in Agricultural Experimentation (with Discussion).* Journal of the Royal Statistical Society, Series B.

Nuijten, M. B., Wetzels, R., Matzke, D., Dolan, C. V., and Wagenmakers, E. M. (2015). A default Bayesian hypothesis test for mediation. *Behavior Research Methods*, 47 :85–97.

Park, S. and Kaplan, D. L. (2015). Bayesian causal mediation analysis for group randomized designs with homogeneous and heterogeneous effects: Simulation and case study. *Multivariate behavioral research*, 50 3 :316–33.

Pearl, J. (2001). Direct and indirect effects. In *Proceedings of the Seventeenth Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, UAI'01, pages 411–420, San Francisco, CA, USA. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

Pearl, J., Glymour, M., and Jewell, N. (2016). *Causal Inference in Statistics: A Primer*. Wiley.

Pearl, J. and Mackenzie, D. (2018). *The Book of Why : The New Science of Cause and Effect*. Basic Books.

Petersen, M. L., Sinisi, S. E., and van der Laan, M. J. (2006). Estimation of direct causal effects. *Epidemiology*, 17.

Petersen, W. (1965). Society and the Adolescent Self-Image. Morris Rosenberg. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1965. xii + 326 pp. *Science*, 148.

Price, L. (2016). *Psychometric Methods : Theory into Practice*. The Guilford Press.

R Core Team (2016). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

R Core Team (2017). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.

Redman, T. and Snape, E. (2006). The consequences of perceived age discrimination amongst older police officers: Is social support a buffer ? *British Journal of Management*, 17(2) :167–175.

Robins, J. M. (2003). *Semantics of causal DAG models and the identification of direct and indirect effects. In Peter J. Green, S.R.N.L.H. and Green, P.J. and Hjort, N.L. and Richardson, S. and Richardson, D.E.P.H.S. Highly Structured Stochastic Systems*. Oxford Statistical Science Series (0-19-961199-8) Series. Oxford University Press.

Robins, J. M. and Greenland, S. (1992). Identifiability and exchangeability for direct and indirect effects. *Epidemiology*, 3.

Rubin, D. B. (1974). Estimating causal effects of treatments in randomized and nonrandomized studies. *Journal of Educational Psychology*, 66(688-701).

Salini, S. and Kenett, R. S. (2011). *Standards and Classical Techniques in Data Analysis of Customer Satisfaction Surveys*. John Wiley & Sons, Ltd.

Schmader, T. and Johns, M. (2003). Converging evidence that stereotype threat reduces working memory capacity. *Journal of personality and social psychology*, 85(3) :440–452.

Schuirmann, D. J. (1987). A comparison of the two one-sided tests procedure and the power approach for assessing the equivalence of average bioavailability. *Journal of Pharmacokinetics and Biopharmaceutics*, 15(6) :657–680.

Shah, R. D. and Peters, J. (2018). The hardness of conditional independence testing and the generalised covariance measure. *arXiv preprint arXiv :1804.07203*.

Shrout, P. E. and Bolger, N. (2002). Mediation in experimental and nonexperimental studies : New procedures and recommendations. *Psychological Methods*, 7.

Sobel, M. E. (1982). Asymptotic confidence intervals for indirect effects in structural equation models. *Sociological Methodology*, 13.

Spiegelhalter, D. J., Abrams, K. R., and Myles, J. P. (2004). *BAyesian Approaches to Clinical Trials and Health-Care Evaluation*. Wiley, Chichester.

Stan Development Team (2018a). RStan : the R interface to Stan. R package version 2.18.1.

Stan Development Team (2018b). RStan: the R interface to Stan. R package version 2.18.1.

Steen, J., Loeys, T., Moerkerke, B., and Vansteelandt, S. (2017). medflex: An R package for flexible mediation analysis using natural effect models. *Journal of Statistical Software*, 76(11) :1–46.

Tessoulin, M., Galharret, J.-M., Gilet, A.-L., and Colombel, F. (2019). Misinformation Effect in Aging: A New Light with Equivalence Testing. *The Journals of Gerontology: Series B*.

Tingley, D., Yamamoto, T., Hirose, K., Keele, L., and Imai, K. (2014). mediation: R package for causal mediation analysis. *Journal of Statistical Software*, 59((5)) :1–38.

Tong, S. T., Van Der Heide, B., Langwell, L., and Walther, J. B. (2008). Too Much of a Good Thing ? The Relationship between Number of Friends and Interpersonal Impressions on Facebook. *Journal of Computer-Mediated Communication*, 13(3) :531–549.

VanderWeele, T. (2015). *Explanation in Causal Inference: Methods for Mediation and Interaction*. Oxford University Press.

Wallinga, J. (2002). Optically stimulated luminescence dating of fluvial deposits: a review. *Boreas*, pages P 303–322.

Wasserman, L. (2004). *A Concise Course in Statistical Inference*. Springer.

Wieder, B. and Ossimitz, M.-L. (2015). The impact of business intelligence on the quality of decision making – a mediation model. *Procedia Computer Science*, 64 :1163 – 1171.

Wood, S. (2006). *Generalized additive models: an introduction with R*. Texts in Statistical Science. Chapman & Hall, UK United Kingdom.

Yuan, Y. and MacKinnon, D. P. (2009). Bayesian mediation analysis. *Psychological Methods*, 14.

Zellner, A. (1971). *An Introduction to Bayesian Inference in Econometrics*. A Wiley-Interscience publication. Wiley.

UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

UNIVERSITÉ DE NANTES

Titre : Statistique bayésienne appliquée en Sciences Humaines et Sociales

Mot clés : analyse de médiation, modélisation bayésienne appliquée, archéologie

Résumé : Ce travail s'intéresse à deux problématiques : la première concerne l'analyse de médiation et la seconde concerne la datation en archéologie en présence de valeurs aberrantes. Concernant l'analyse de médiation, d'une part, je développe une approche non paramétrique pour tester l'existence de l'effet direct dans la médiation causale à réponse binaire. D'autre part, différentes lois a priori sont comparées dans l'inférence bayésienne pour la médiation causale à réponse binaire. Enfin, les G-priors sont adaptés à des modèles de médiation issus de recherche en psychologie et un test de modération basé sur le facteur de Bayes est proposé. Concernant la datation en archéologie, une méthodologie est construite pour estimer des âges en présence de valeurs aberrantes. Celle-ci est basée sur une modélisation bayésienne existante (Event Model) à partir de laquelle un test de détection des valeurs aberrantes est développé. Cette méthodologie est appliquée dans le cadre de la combinaison de mesures et dans le cadre de l'estimation d'un âge par la méthode OSL (*Optically Stimulated Luminescence*).

Title: Applied Bayesian Statistics in the Human and Social Sciences.

Keywords: Bayesian inference for causal mediation, applied Bayesian modelling, archaeology

Abstract: This work focuses on two issues: the first concerns mediation analysis and the second concerns dating in archaeology in the presence of outliers. Concerning the mediation analysis, I have developed a non-parametric approach to test the existence of direct effect in binary response causal mediation. Second, prior distributions are compared in Bayesian inference for causal mediation with binary response. Third, the B-priors are adapted to mediation models from psychological research and a moderation test based on the Bayes factor is proposed. Concerning dating in archaeology, a methodology is developed to estimate ages in the presence of outliers. This is based on an existing Bayesian model (Event Model) from which an outlier detection test is developed. This methodology is applied in the combination of measurements and in the estimation of an OSL age (*Optically Stimulated Luminescence*).